

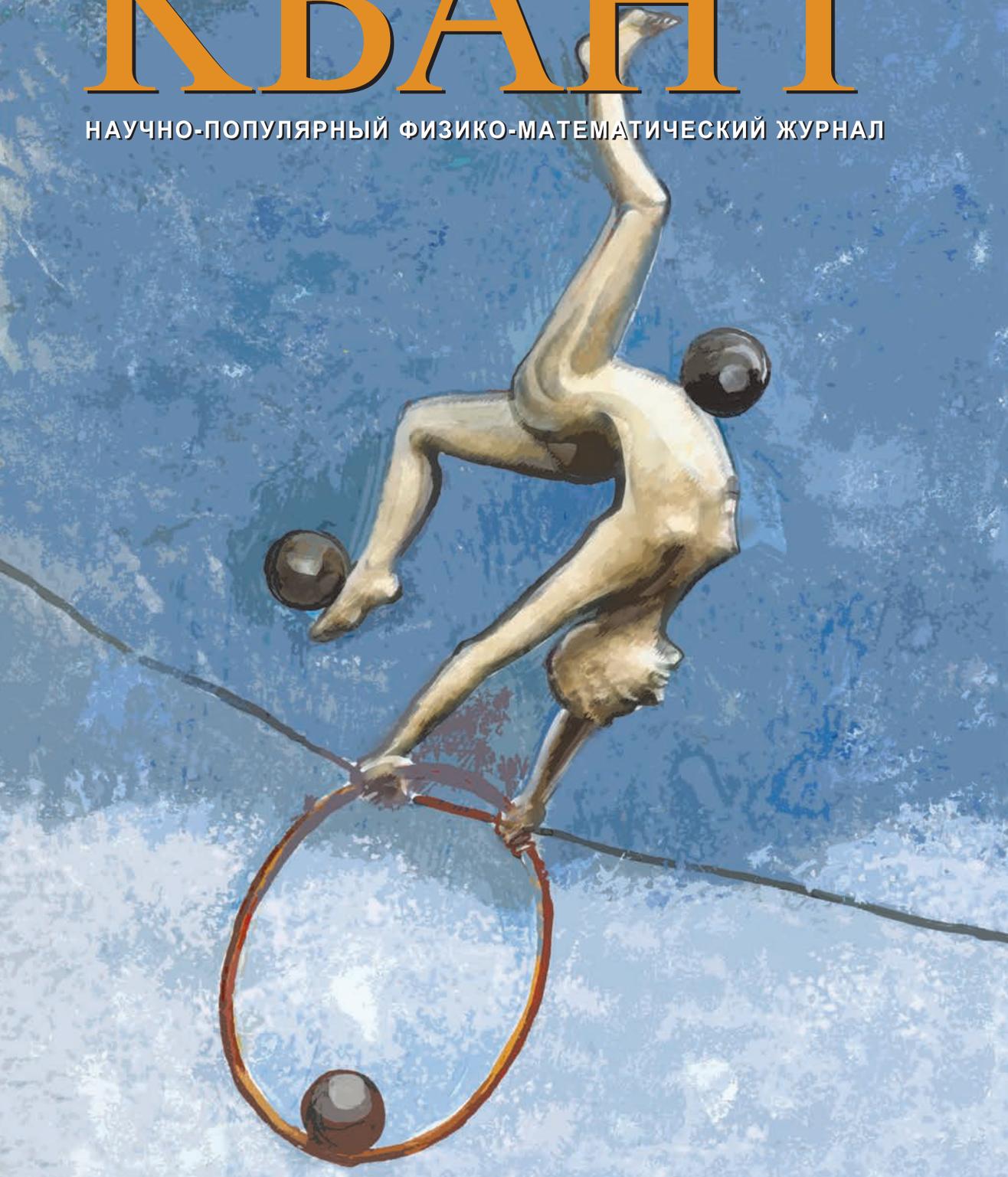
МАЙ

ISSN 0130-2221

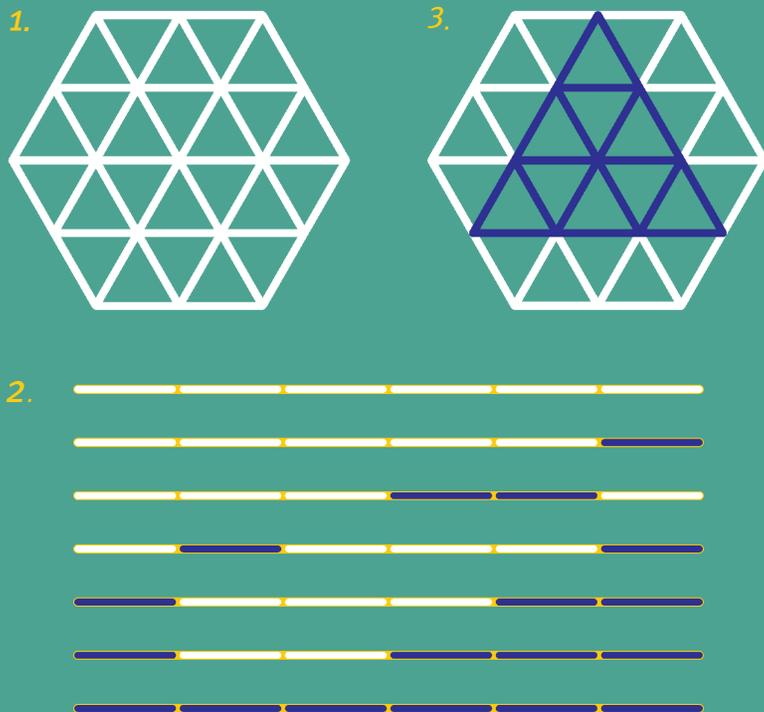
2018 · № 5

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



# ЗИГЗАГИ УДАЧИ



Если в правильном шестиугольнике со стороной 2 провести через вершины и середины сторон прямые, параллельные его сторонам, то получится решетка из 42 единичных отрезков, разбивающая шестиугольник на 24 треугольника (рис. 1). На этой решетке нужно расположить семь непересекающихся ломаных, каждая из которых состоит из шести звеньев единичной длины, покрашенных в белый и синий цвета (рис. 2). Расположить ломанные нужно так, чтобы в центре поля получился равносторонний треугольник со стороной 3 (рис. 3).

Компьютерное исследование, выполненное А.Батальщиковым, показало, что у этой головоломки всего четыре решения.

Головоломку легко сделать в домашних условиях. Решетку можно просто нарисовать на бумаге. А можно наклеить на бумагу треугольные кусочки картона или пластика, чтобы между ними остались пазы, образующие решетку, – так будет удобнее пробовать разные варианты расположения ломаных. Их, в свою очередь, удобно сделать из тонких шнурков, а звенья – из белой и синей изолянтной ленты, наклеенной на эти шнурки.

## В номере:

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белоухов,  
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,  
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,  
А.П.Веселов, А.Н.Виленин, В.И.Голубев,  
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,  
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,  
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников  
(заместитель главного редактора),  
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.В.Произволов,  
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,  
Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,  
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,  
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Выпуклый анализ на плоскости.  
*Л.Локуциевский, В.Тихомиров*
- 9 Электростатическое взаимодействие  
в диэлектрических средах (окончание).  
*С.Сырцов*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 14 Задачи M2510–M2513, Ф2517–Ф2520  
15 Решения задач M2498–M2501, Ф2505–Ф2508  
20 О кратности покрытия ориентированными  
многоугольниками. *А.Канель-Белов,  
П.Кожевников*

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ  
25 Задачи

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 26 На том стоим! *Л.Ашкинази*

## НАМ ПИШУТ

- 30 Незадача с задачей  
31 Дополнение к приключению одной задачи

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 32 Законы механики и параметры эллипса.  
*В.Гребень*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 34 Теорема об изогоналях (окончание).  
*А.Куликова, Д.Прокопенко*

## ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 37 Маятник Капицы. *С.Дворянинов*

## ОЛИМПИАДЫ

- 39 XXXIX Турнир городов  
41 Московская физическая олимпиада  
школьников 2018 года

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 48 Национальный исследовательский университет  
«МИЭТ». Физика
- 52 Ответы, указания, решения  
Смесь (24)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «На том стоим!»*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# Выпуклый анализ на плоскости

Л. ЛОКУЦИЕВСКИЙ, В. ТИХОМИРОВ

**В**ЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ – РАЗДЕЛ МАТЕМАТИКИ, в котором изучают выпуклые множества, выпуклые функции и выпуклые экстремальные задачи. Этот раздел сформировался лишь чуть более полувека назад, хотя понятием выпуклой кривой пользовался Архимед, а основные теоремы выпуклого анализа на плоскости могли быть доказаны Евклидом (в чем мы убедимся). Ныне теория выпуклости имеет большие приложения в естествознании, экономике и самой математике.

Наше знакомство с выпуклым анализом будет проходить на евклидовой плоскости. Опираемся мы будем на знания из курса геометрии седьмого-восьмого классов. Саму плоскость обозначим  $\mathbb{E}^2$  в честь Евклида. Точки плоскости будем, как обычно, обозначать большими латинскими буквами, а подмножества плоскости – каллиграфическими большими латинскими буквами.

Еще древний философ Аристотель высказал мысль, что нельзя что-либо доказать «из ничего». Нужны некоторые утверждения, которые принимаются без доказательства. Евклид (ок. 300 г. до н.э.) предпринял попытку дедуктивного построения геометрии, когда теория строится шаг за шагом, исходя из нескольких утверждений, принимаемых без доказательства. В своей книге «Начала» [1] он выдвинул пять таких основополагающих утверждений, которые назвал *постулатами*. Нам понадобятся три первых, которые мы к тому же потом чуть уточним. Вот эти постулаты Евклида, описывающие свойства точек, прямых и окружностей.

1. *От всякой точки до всякой точки можно провести отрезок прямой.*

2. *Ограниченную прямую (отрезок) можно непрерывно продолжать по прямой.*

3. *Из всякого центра всяким радиусом циркулем может быть описана окружность.*<sup>1</sup>

На плоскости важнейшими линиями являются прямые и окружности, именно они упомянуты в евклидовых постулатах. Мы видим, что Евклид упоминает циркуль. Помимо циркуля он пользовался линейкой. Мы тоже будем (в своем воображении) пользоваться циркулем и линейкой (для построения окружностей и прямых), но, в отличие от Евклида, мы будем пользоваться еще одним инструментом – измерителем расстояния. Так что будем считать, что на плоскости можно измерить расстояние между точками, и если  $A$  и  $B$  – точки плоскости, то расстояние между ними условимся обозначать  $|AB|$ . Расстояние обладает такими вроде бы естественными, но настолько важными свойствами, что нарушение хотя бы одного из них лишает его права называться «расстоянием» (и приводит к очень неожиданным результатам). Итак, если точки  $A$  и  $B$  совпадают, то расстояние между ними равно нулю, и наоборот, если  $|AB| = 0$ , то  $A$  и  $B$  совпадают; расстояние от  $A$  до  $B$  равно расстоянию от  $B$  до  $A$  ( $|AB| = |BA|$ ); наконец, выполнено неравенство треугольника  $|AB| \leq |AC| + |CB|$  для любых точек плоскости  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Следует еще упомянуть свойство неотрицательности расстояния  $|AB| \geq 0$ , хотя оно и следует из предыдущих свойств (докажите!).

<sup>1</sup> Интересно, что сам Евклид не вводит и не использует термин «отрезок прямой», а всюду употребляет слово «прямая», смысл которого зависит от контекста. Мы пользуемся привычными читателю терминами, тем самым допуская некоторую вольность цитирования первоисточника.

Мы будем опираться на свойства точек и прямых, которые уточняют постулаты Евклида.

1) *Через две различные точки  $A$  и  $B$  плоскости  $\mathbb{E}^2$  проходит единственная прямая; причем если  $|AB| = |AC| + |CB|$ , то точка  $C$  лежит на этой прямой.* В этом случае будем также говорить, что

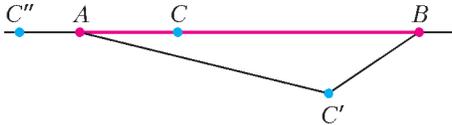


Рис. 1. Точка  $C$  лежит на отрезке  $[AB]$ ,  $|AB| = |AC| + |CB|$ , а точки  $C'$  и  $C''$  не лежат, так как  $|AB| < |AC'| + |C'B|$  и  $|AB| < |AC''| + |C''B|$

точка  $C$  лежит между  $A$  и  $B$ . Множество точек, лежащих между  $A$  и  $B$ , вместе с самими точками  $A$  и  $B$  будем называть отрезком с граничными точками  $A$  и  $B$ . Такой отрезок будем обозначать  $[AB]$  (рис.1).

Понятие отрезка позволяет дать основное для нас определение – выпуклого множества. Множество  $\mathcal{E}$  называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками  $A$  и  $B$  из  $\mathcal{E}$  весь отрезок  $[AB]$  принадлежит  $\mathcal{E}$ .

Мы определили геометрическую фигуру – отрезок. Определим еще две геометрические фигуры. Окружностью с центром в точке  $O$  радиуса  $r > 0$  называется совокупность всех точек, удаленных от  $O$  на расстоянии  $r$ . Круг  $\mathcal{B}(O, r)$  состоит из всех точек, удаленных от  $O$  не более чем на  $r$  (обозначение  $\mathcal{B}$  от Ball – шар). Согласно определению, отрезок выпукл. Круг тоже выпукл (докажите!), а вот окружность нет: если соединить любые две различные точки на окружности отрезком, то все точки этого отрезка, кроме концов, окружности не принадлежат.

Здесь разумно разобраться в том, что такое граница множества (в том числе выпуклого). Не граничные, *внутренние* точки множества обладают тем свойством, что любую такую точку можно сделать центром круга, пусть очень маленького, но который целиком лежит в множестве. А *граничная* точка, наоборот, этим свойством не обладает: любой круг с центром

в граничной точке имеет и общие точки со множеством, и точки, не принадлежащие множеству. *Граница* выпуклого множества (т.е. множество его граничных точек) – это нечто вроде сплошного забора, отделяющего множество от остальной части плоскости. Далее мы рассматриваем только выпуклые множества, в которые включена их граница. Такие множества называют *замкнутыми* выпуклыми множествами на плоскости  $\mathbb{E}^2$ .

Разберем простой пример. Внутренними точками круга  $\mathcal{B}(O, r)$  являются все его точки, не лежащие на соответствующей окружности. Действительно, если расстояние от точки  $A$  до  $O$  меньше  $r$ ,  $|OA| < r$ , то  $A$  является внутренней точкой круга  $\mathcal{B}(O, r)$  по неравенству треугольника. Доказательство того, что окружность является границей круга, не так очевидно, как кажется на первый взгляд. Попробуем доказать, что точки окружности не являются внутренними точками круга. Выберем точку  $A$  на окружности,  $|OA| = r$ , и возьмем любой маленький круг с центром в  $A$ . Как доказать, что в нем найдутся точки не из  $\mathcal{B}(O, r)$ ? Например, так: проведем луч  $OA$ . Казалось бы, он должен «протыкать» окружность в точке  $A$ , т.е. для любого числа  $x > r$  на луче  $OA$  должны найтись нужные нам точки на расстоянии  $x$  от  $O$ .

Это соображение наводит нас на второе свойство точек и прямых на плоскости, которое нам понадобится в доказательствах. Оно уточняет второй и третий постулаты Евклида.

2) *Точка  $O$  на прямой делит точки этой прямой на две выпуклые совокупности, называемые лучами с вершиной в  $O$ . При этом (а) если  $A$  и  $B$  принадлежат разным лучам, то  $O$  лежит в отрезке  $[AB]$  и (б) каждый из лучей неотличим от совокупности неотрицательных вещественных чисел, если каждой точке луча поставить в соответствие расстояние от нее до вершины луча  $O$  (рис.2).*



Рис. 2. Точки  $A$  и  $B$  лежат на разных лучах относительно точки  $O$

Поясним сказанное и изображенное на рисунке. Мы видим два луча. Точка  $O$  выполняет роль «пропускного пункта» на прямой: если обе точки принадлежат одному из лучей, то можно «проехать из пункта  $A$  в пункт  $B$ » и «вас никто не остановит» (это и означает, что лучи выпуклы). А если точки принадлежат разным лучам, то придется проехать через пункт  $O$  (и «предъявить документ»).

Вопрос о «неотличимости» много сложнее. Греческая научная мысль во времена Пифагора столкнулась с серьезным испытанием: было доказано, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, а это противоречило принятой в то время пифагорейцами формуле «всё есть число». На нашем арифметико-алгебраическом языке это означает, что  $\sqrt{2}$  не является дробью  $\frac{m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  – натуральные числа, а это выходит за рамки понятия «число», как его воспринимали древние греки. И они не стали развивать понятие числа. В частности, у Евклида в его «Началах» нет понятия числа, хотя фактически число  $\sqrt{2}$  у самого Евклида представлено (при доказательстве несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной) как бесконечная непрерывная дробь.

Непрерывная дробь (или цепная дробь) – это конечное или бесконечное математическое выражение вида

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}},$$

где  $a_0$  есть целое число, а все остальные  $a_n$  – натуральные числа.

Любое вещественное число можно представить в виде цепной дроби (конечной или бесконечной). Число представляется конечной цепной дробью тогда и только тогда, когда оно рационально. А если бы Евклид захотел записать длину диагонали квадрата со стороной единица, то получил бы число  $[1; 2, 2, 2, 2, \dots]$  (равное  $\sqrt{2}$ ).

Попробуем вычислить длину какого-нибудь отрезка  $[OA]$ . Проведем прямую  $OA$  (по первому свойству точек и прямых). Точка  $O$  по второму свойству делит эту

прямую на два луча. Нас, конечно, будет интересовать тот луч, который содержит точку  $A$ . Выберем нашу обычную, действующую с XIX века единицу длины в 1 метр, 1 м (равный примерно  $1/40000000$  длины экватора Земли), и будем откладывать отрезок длиной в 1 м (по второму свойству) от точки  $O$  по этому лучу. Если точка  $A$  совпадет, скажем, с  $k$ -й точкой, отмеченной на луче, то тогда расстояние  $|OA|$  от  $O$  до  $A$  будет  $k$  метров. Как поступать в том случае, если расстояние не исчисляется целым (или дробным) числом метров, разберемся на том же примере диагонали квадрата со стороной, равной одному метру. Отложим это расстояние с помощью циркуля от точки  $O$  по какому-нибудь лучу. Обнаружится, что точка, удаленная от  $O$  на длину диагонали, находится между 1 м и 2 м. Переходя к десятым долям метра, получим, что искомая точка лежит между 1,4 м и 1,5 м.

Дальше обнаружится, что выполнены неравенства  $1,41 \text{ м} < \sqrt{2} \text{ м} < 1,42 \text{ м}$ . Мы вычислили наше число с точностью до одной сотой. А вот вычисление нашего числа с точностью до одной миллиардной:  $1,414213562 \text{ м} < \sqrt{2} \text{ м} < 1,414213563 \text{ м}$ . Этот процесс никогда не кончится. Корень из двух будет представлен бесконечной десятичной дробью. (Недавно корень из двух был вычислен с точностью до 10 триллионов(!) десятичных знаков после запятой; это характеризует возможности современных компьютеров.)

Множество вещественных чисел обозначается в настоящее время символом  $\mathbb{R}$  и является множеством всех бесконечных десятичных дробей (в том числе с периодом, состоящим из одних нулей, но исключая период из одних девяток).<sup>2</sup> Проведенный нами процесс вычисления длины диагонали квадрата и означает, что мы поставили в соответствие этой длине бесконечную десятичную дробь. Таким образом, свойство 2(б) нужно понимать именно в смысле этого вычисления (проделанного для каждой точки на луче). Именно поэто-

<sup>2</sup> Есть масса других эквивалентных способов представить множество вещественных чисел.

му  $\mathbb{R}$  называют еще *вещественной прямой*.

Нам осталось обсудить еще одно свойство евклидовой плоскости, которого у Евклида не было, но им он многократно пользуется в своей книге. Как мы уже сказали, точка на прямой делит последнюю на две выпуклые совокупности, называемые лучами. Точно так же мы постулируем следующее.

**3) Прямая на плоскости, обозначим ее  $l$ , делит точки плоскости на две выпуклые совокупности, называемые полуплоскостями с границей  $l$ , и при этом, если  $A$  и  $B$  принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок  $[AB]$  пересекается с  $l$  (рис. 3).** Каждая из полуплоскостей определяется

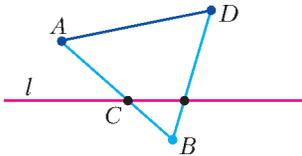


Рис. 3. Точки  $A$  и  $B$  лежат в разных полуплоскостях относительно прямой  $l$ , а точки  $A$  и  $D$  – в одной

любой своей точкой, которая не лежит на  $l$  (на рисунке 3 – точкой  $A$  (или  $D$ ) и точкой  $B$ ).

В конце XIX века немецкий математик Мориц Паш, изучая аксиоматику Евклида, обнаружил, что Евклид многократно пользуется одним утверждением, но никак его не доказывает. Вот это утверждение.

**Утверждение.** Если прямая на плоскости  $\mathbb{E}^2$  пересекает одну сторону треугольника во внутренней точке и при этом не проходит через противоположную стороне вершину, то она пересекает еще одну сторону треугольника во внутренней точке (рис. 4).

В 1882 Пашу удалось показать, что это утверждение никоим образом не может

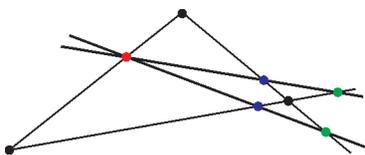


Рис. 4. Иллюстрация аксиомы Паша

быть выведено из постулатов Евклида. С тех пор это утверждение называют *аксиомой Паша*. Без аксиомы Паша невозможно определить понятие полуплоскости, так как невозможно доказать, что если точки  $A$  и  $B$  лежат с одной стороны от  $l$  и точки  $B$  и  $C$  лежат с одной стороны от  $l$ , то точки  $A$  и  $C$  тоже лежат с одной стороны от  $l$ . Позднее, уже в XX веке, В.Шмелева (Wanda Szmielew) и Л.Штерба (Leslaw Szczerba) дали полный ответ на вопрос о том, как будет устроена геометрия на плоскости, если отказаться от аксиомы Паша [4].

Аксиома Паша напрямую связана с выпуклостью. Поэтому в этой статье мы будем пользоваться тремя сформулированными постулатами, и аксиома Паша легко вытекает из третьего постулата.

А теперь, когда мы уточнили постулаты Евклида, сформулированные в третьем веке до нашей эры, перенесемся в девятнадцатый и двадцатый века эры «нашей» и докажем все основополагающие теоремы выпуклой геометрии. Основы теории выпуклости (не только на плоскости или в трехмерном пространстве, но и в пространстве большего числа измерений) заложил выдающийся математик конца XIX – начала XX веков Герман Минковский (1864–1909).

Теория выпуклости базируется на теоремах отделимости. Для того чтобы сформулировать эти теоремы, необходимо определить само понятие отделимости.

Говорят, что прямая  $l$  отделяет множество  $\mathcal{E}_1$  от множества  $\mathcal{E}_2$ , если  $\mathcal{E}_1$  лежит в одной полуплоскости с границей  $l$ , а  $\mathcal{E}_2$  – в другой. Скажем, что прямая  $l$  строго отделяет множество  $\mathcal{E}$  от точки  $A$ , если она отделяет  $\mathcal{E}$  от  $A$ , причем  $A$  не принадлежит разделяющей прямой  $l$ , и множество  $\mathcal{E}$  с ней не пересекается.

**Теорема 1 (теорема отделимости).** *Непустое замкнутое выпуклое подмножество евклидовой плоскости  $\mathbb{E}^2$  можно строго отделить от точки, ему не принадлежащей.*

При доказательстве этой теоремы мы будем пользоваться таким свойством замкнутых множеств: *если  $\mathcal{D}$  – замкнутое*

множество и точка  $A$  не принадлежит  $\mathcal{E}$ , тогда в  $\mathcal{D}$  существует (хотя бы одна) ближайшая к ней точка  $B$ . Для выпуклых замкнутых множеств верен и более сильный факт (который, впрочем, нам не требуется): если множество  $\mathcal{E}$  не только замкнуто, но еще и выпукло, то ближайшая к  $A$  точка в  $\mathcal{E}$  единственна.

С такого рода результатами о существовании различных геометрических точек и фигур математики постоянно сталкиваются. Многие из них основываются на теореме Вейерштрасса о существовании минимума и максимума у непрерывной функции на компакте. Она относится к разделу математики, возникшему в XX веке. До середины девятнадцатого века существование точек, подобных точке  $B$ , считалось очевидным и не доказывалось.

**Доказательство теоремы отделимости (теоремы 1).** Итак, существует точка  $B$  – ближайшая к  $A$  точка из  $\mathcal{E}$ . Проведем прямую  $l$ , проходящую через любую внутреннюю точку  $C$  отрезка  $[AB]$ , перпендикулярно этому отрезку (рис.5). Докажем,

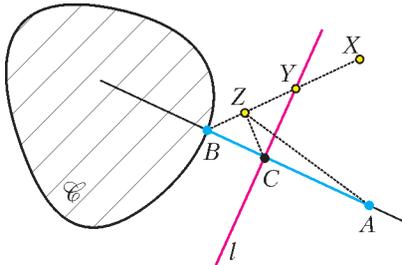


Рис. 5. Иллюстрация к доказательству теоремы отделимости

что прямая  $l$  строго отделяет точку  $A$  от множества  $\mathcal{E}$ .

Доказательство будем проводить, как принято говорить, «от противного». По построению, точки  $A$  и  $B$  принадлежат разным полуплоскостям относительно  $l$  и  $B \in \mathcal{E}$ . Предположим, что утверждение нашей теоремы неверно и существует (гипотетическая) точка  $X \in \mathcal{E}$  из той же полуплоскости, что  $A$ , и покажем, как прийти к противоречию. Если такая гипотетическая точка  $X$  в множестве  $\mathcal{E}$  есть, то по третьему свойству плоскости о выпуклости полуплоскостей на отрезке  $[BX]$  найдется точка  $Y$ , принадлежащая  $l$ . Ввиду

того что точки  $B$  и  $X$  принадлежат  $\mathcal{E}$ , точка  $Y$  принадлежит этому множеству по определению выпуклости.

Точка  $Y$  не может совпадать с точкой  $C$  – если бы точка  $Y$  совпала с  $C$ , то она была бы к  $A$  ближе, чем  $B$ , что противоречит свойству точки  $B$ . Поэтому точки  $B$ ,  $C$  и  $Y$  образуют прямоугольный треугольник  $BCY$  и  $[BY]$  – его гипотенуза. Пусть  $[CZ]$  – высота  $\triangle BCY$ , опущенная из  $C$  на гипотенузу. Очевидно,  $Z \in \mathcal{E}$ .

Итак, если гипотетическая точка  $X \in \mathcal{E}$  существует, то существуют и определенные выше точки  $Y$  и  $Z$ . Здесь мы и приходим к противоречию: в силу того что высота, проведенная из прямого угла, меньше катета, получаем  $|ZC| < |BC|$ . Откуда из неравенства треугольника получаем  $|AZ| < |AC| + |CZ| < |AC| + |BC| = |AB|$ , т.е. точка  $Z$  ближе к  $A$ , чем точка  $B$ . Но  $Z \in \mathcal{E}$ . Противоречие доказывает теорему.

Одно из важнейших свойств выпуклых объектов – это возможность их *двойственного описания*. Само понятие двойственности в математике связано обычно с некоторым преобразованием множеств (или функций) в другой «двойственный» объект. Двойственным объектом для выпуклого множества является *поляр* этого множества. Введем на плоскости декартову систему координат. Тогда полярю множества  $\mathcal{E}$  называется новое множество точек

$$\mathcal{E}^\circ = \{(p; q) \mid px + qy \leq 1 \text{ при всех } (x; y) \in \mathcal{E}\}.$$

Отметим, что для любой пары чисел  $(p; q) \neq (0; 0)$  множество всех таких точек  $(x; y)$  на плоскости, удовлетворяющих неравенству  $px + qy \leq 1$ , образует полуплоскость относительно прямой  $px + qy = 1$ , содержащую начало координат. Таким образом, поляр множества описывает все такие полуплоскости, которые содержат  $\mathcal{E}$ .

**Лемма.** Поляр  $\mathcal{D}^\circ$  любого (не обязательно выпуклого или замкнутого) множества  $\mathcal{D}$  является выпуклым замкнутым множеством, содержащим начало координат.

**Доказательство.** Зафиксируем точку  $(x; y)$  и рассмотрим замкнутую полуплос-

кость  $P_{x,y}$ , состоящую из таких точек  $(p; q)$ , что  $px + qy \leq 1$ . Тогда поляр  $\mathcal{D}^\circ$  является пересечением полуплоскостей  $P_{x,y}$  по всем  $(x; y) \in \mathcal{D}$ . Поскольку каждая такая полуплоскость выпукла, замкнута и содержит начало координат, то и поляр является выпуклой, замкнутой и содержит начало координат.

Идея выпуклой двойственности для выпуклых множеств проявляется в том, что, зная полярю множества, можно восстановить само множество. Для этого нужно всего лишь построить полярю полярю! Итак, вот точная формулировка.

**Теорема 2 (теорема о биполяре).** Пусть  $\mathcal{E}$  – некоторое множество, содержащее начало координат. Тогда множество  $\mathcal{E}$  выпукло и замкнуто в том и только том случае, когда  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\circ\circ}$ .

Чтобы почувствовать утверждение теоремы о биполяре, рассмотрим один простой, но очень важный пример. Пусть  $\mathcal{E}$  – квадрат,  $\mathcal{E} = \{|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$  (рис. 6). Най-

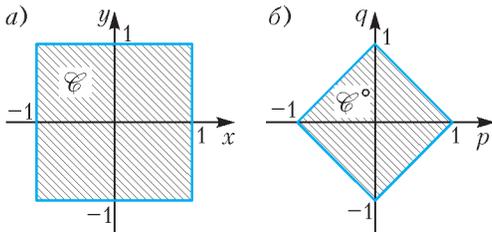


Рис. 6. Пример множества  $\mathcal{E}$  и его поляр  $\mathcal{E}^\circ$

дем его полярю. Если  $px + qy \leq 1$  для всех  $(x; y) \in \mathcal{E}$ , то, взяв в качестве  $x = \pm 1$  и  $y = \pm 1$ , получим, что  $|p| + |q| \leq 1$ . Обратно, если  $|p| + |q| \leq 1$ , то для всех  $(x; y) \in \mathcal{E}$  выполнено  $px + qy \leq |p| + |q| \leq 1$ . Поэтому поляр – это тоже квадрат, но со сторонами, не параллельными осям:  $\mathcal{E}^\circ = \{|p| + |q| \leq 1\}$ . Теперь вычислим биполярю. Если  $xp + yq \leq 1$  для всех  $(p; q) \in \mathcal{E}^\circ$ , то, подставив вершины  $(\pm 1; 0)$  и  $(0; \pm 1)$  в качестве пар  $(p; q)$ , получим  $|x| \leq 1$  и  $|y| \leq 1$ . Обратно, если  $|x| \leq 1$  и  $|y| \leq 1$ , то  $xp + yq \leq |p| + |q| \leq 1$ , и мы видим, что  $\mathcal{E}^{\circ\circ} = \mathcal{E}$ .

Теорема о биполяре является следствием теоремы Минковского о двойственном

описании выпуклых множеств. Прямое описание множества – это описание (тем или иным способом) всех точек, ему принадлежащих. Любое же замкнутое выпуклое множество можно описать *двойственно*, задав все полуплоскости, его содержащие.

**Теорема 3 (теорема Минковского о двойственном описании выпуклых замкнутых множеств).** Выпуклое замкнутое множество из  $\mathbb{E}^2$  является пересечением всех полуплоскостей, его содержащих.

Таким образом, выпуклые замкнутые множества можно определять двумя путями – через отрезки и через полуплоскости. Отметим, что если множество не выпукло, то оно содержится в пересечении всех полуплоскостей, его содержащих, но не будет с ним совпадать. Поэтому точно описать невыпуклое множество с помощью полуплоскостей не получится.

**Доказательство теоремы Минковского (теоремы 3).** Пусть  $\mathcal{E}$  – выпуклое замкнутое множество, а  $\mathcal{E}^\circ$  – пересечение всех полуплоскостей, содержащих  $\mathcal{E}$ . По определению,  $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^\circ$ . Далее проведем рассуждение от противного. Предположим, что утверждение теоремы неверно и найдется точка  $A$ , принадлежащая  $\mathcal{E}^\circ$  и не принадлежащая  $\mathcal{E}$ . Тогда, строго отделив по теореме 1 точку  $A$  от  $\mathcal{E}$ , приходим к противоречию.

**Задача 1.** Какие множества на плоскости можно представить как пересечение (замкнутых) полуплоскостей?

Теорема Минковского имеет огромное множество применений, в том числе и в школьной геометрии. Например, читателю может быть небезынтересна статья [5] в «Кванте», в которой исследуются множества середин отрезков с концами в двух заданных выпуклых многоугольниках.

Теория выпуклых множеств фактически родилась в XIX веке, но именно в XX веке, не побоимся так сказать, геометрия выпуклых множеств расцвела. Появилось множество работ, ей посвященных, образовался широкий круг математиков, интересовавшихся выпуклой геометрией. В 1934 году в Германии вышла книга [2] двух геометров Томми Боннесена (1873–1935) и Морица Вернера Фенхеля

(1905–1988), подводящая некоторый итог бурно развивающейся теории. У нас в тридцатые годы стали популярны школьные кружки. Появилась популярная литература для школьников. Назовем имена замечательных ученых – Лазаря Ароновича Люстерника (1899–1981) и Льва Генриховича Шнирельмана (1905–1938), посвятивших выпуклой геометрии и статьи и популярные брошюры, а также хотим назвать студента мехмата Давида Шклярского, совершившего переворот в кружковой деятельности. Он построил свой кружок не на докладах, а на решениях задач, очень многие из которых были из выпуклой геометрии.

Стимулом для Минковского создавать теорию выпуклых множеств была, как это ни покажется странным, теория чисел. Читатель может прочесть статью [6] в «Кванте», в которой утверждение о том, что простое число представимо в виде суммы двух квадратов, лишь если при делении на четыре оно дает в остатке единицу (одна из первых замечательных теорем теории чисел), доказывалось по Минковскому с помощью свойств выпуклости.

Доказательство теоремы о биполяре в своей основе содержит идею, заложенную в теореме Минковского.

**Доказательство теоремы о биполяре (теоремы 2).** Согласно теореме Минковского, выпуклое замкнутое множество  $\mathcal{C}$  совпадает с пересечением полуплоскостей, его содержащих. Поэтому если  $\mathcal{C}$  содержит начало координат, а полуплоскость содержит  $\mathcal{C}$ , то полуплоскость тоже должна содержать начало координат. Все полуплоскости, содержащие начало координат, делятся на два важных типа.

1. Полуплоскости, не содержащие начало на граничной прямой. В этом случае граничная прямая может быть задана равенством  $px + qy = 1$  (при подходящем выборе  $p$  и  $q$ ), а сама полуплоскость задается неравенством  $px + qy \leq 1$ .

2. Полуплоскости, содержащие начало на граничной прямой. В этом случае граничная прямая может быть задана равенством  $px + qy = 0$  (при подходящем выборе  $p$  и  $q$ ), а сама полуплоскость задается неравенством  $px + qy \leq 0$ .

Таким образом, поляра  $\mathcal{C}^\circ$  есть в точности множество всех полуплоскостей первого типа, содержащих  $\mathcal{C}$ . По определению,

биполяра есть множество

$$\mathcal{C}^{\circ\circ} = \{(x; y) : px + qy \leq 1$$

для всех  $(p; q) \in \mathcal{C}^\circ\}$ .

Тем самым, биполяра  $\mathcal{C}^{\circ\circ}$  содержит такие точки  $(x; y)$ , которые лежат в каждой полуплоскости первого типа из  $\mathcal{C}$ . Каждая такая полуплоскость содержит  $\mathcal{C}$ . Поэтому  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^{\circ\circ}$ .

Однако, формально, равенство  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\circ\circ}$  еще не доказано, так как по теореме Минковского множество  $\mathcal{C}$  совпадает с пересечением всех полуплоскостей, его содержащих, а биполяра  $\mathcal{C}^{\circ\circ}$  есть пересечение только полуплоскостей первого типа. Тем не менее, не используя полуплоскости второго типа, мы не приобрели ни одной новой точки. Действительно, если точка  $(x; y)$  не лежит в  $\mathcal{C}$ , то ее можно строго отделить от  $\mathcal{C}$ , причем разделяющая прямая не может содержать начало координат, так как оно лежит в  $\mathcal{C}$ . Таким образом,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\circ\circ}$ .

Обратное утверждение – если  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\circ\circ}$ , то множество  $\mathcal{C}$  является выпуклым и замкнутым – доказывается очень просто. Действительно, биполяра есть поляра множества  $\mathcal{D} = \mathcal{C}^\circ$ , а значит, выпукла и замкнута.

### Литература

1. Начала Евклида. Книги I–VI. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948 («Классики естествознания»).
2. T. Bonnesen, W. Fenchel. Theorie der Konvexen Körper. – Teubner, Leipzig, 1934.
3. Г.Г. Магарил-Ильяев, В.М. Тихомиров. Выпуклый анализ и его приложения. – М.: Либерком, 2016.
4. L. W. Szczerba and W. Szmielew. On the Euclidean geometry without the Pasch axiom. – Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 18 (1970), 659–666.
5. Н. Васильев. Сложение фигур. – «Квант», 1976, №4.
6. В. Тихомиров. Теорема Ферма–Эйлера о двух квадратах. – «Квант», 1991, №10.

(Окончание следует)

# Электростатическое взаимодействие в диэлектрических средах

С. СЫРЦОВ

**В** РАССМОТРЕННЫХ РАНЕЕ ПРИМЕРАХ все пространство, в котором сосредоточено электрическое поле, было заполнено однородным диэлектриком. В случае если диэлектрик неоднороден (диэлектрическая проницаемость его различных частей не одинакова), оценить степень его влияния на электростатические взаимодействия сложнее и получить простые формулы можно не всегда. Тем более интересно обсудить примеры, когда это удастся сделать.

**Пример 4.** Два точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$  находятся на равных расстояниях от границы раздела двух однородных диэлектриков с проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Найдите силы  $F_1$  и  $F_2$ , действующие на каждый из зарядов.

Физика происходящих процессов здесь следующая. При поляризации обоих диэлектриков вблизи граничной поверхности образуется разное число зарядов со стороны каждого из диэлектриков. В результате на границе (на обеих ее сторонах) сосредотачивается связанный заряд с суммарной поверхностной плотностью  $\sigma_{св} = \sigma_{св1} + \sigma_{св2}$  (рис.3). Оказывается, что поле поляризационных поверхностных зарядов от заряда  $q_1$  в первой среде такое же, как от заряда-изображения

$$q_1' = q_1 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2},$$

расположенного во второй среде на расстоянии  $h$  от границы (расчет ведется для

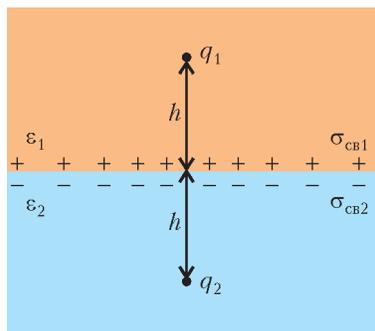


Рис. 3

среды с проницаемостью  $\epsilon_1$ ). Поле, создаваемое во второй среде, эквивалентно полю заряда

$$q_1'' = q_1 \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2},$$

расположенного в той же точке, где находится заряд  $q_1$  (расчет ведется для среды с проницаемостью  $\epsilon_2$ ). Аналогичным способом можно рассчитать и поле связанных зарядов, возникающих на границе под влиянием заряда  $q_2$ . Теперь (вспомнив пример 2) несложно рассчитать действующие на заряды силы:

$$F_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)\epsilon_1} \cdot k \frac{q_1^2}{r^2} + \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} F_0,$$

$$F_2 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)\epsilon_2} \cdot k \frac{q_2^2}{r^2} + \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} F_0.$$

Характерной особенностью найденных сил является их неравенство:  $F_1 \neq F_2$ . Это, впрочем, не удивительно – заряды  $q_1$  и  $q_2$  сами по себе не образуют замкнутую механическую систему (имеются еще связанные заряды на границе раздела сред), поэтому третий закон Ньютона для них

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

выполняться и не должен. Сила  $F_0$  электростатического взаимодействия непосредственно между  $q_1$  и  $q_2$  продолжает определяться истинным законом Кулона (1). А появившиеся на границе сред связанные заряды добавляют в результирующие силы  $F_1$  и  $F_2$  все остальное.

То, что эти добавки значимы, свидетельствует и тот факт, что даже при отсутствии заряда  $q_2$  на заряд  $q_1$  действует сила

$$F_1^* = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)\epsilon_1} \cdot k \frac{q_1^2}{r^2}.$$

При  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  поляризационный заряд на поверхности  $\sigma_{св} < 0$  и положительный заряд  $q_1$  притягивается к границе; при  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  имеем  $\sigma_{св} > 0$  и заряд  $q_1$  от границы отталкивается. Поэтому заряд, первоначально находящийся в среде с большей проницаемостью, стремится уйти от границы на бесконечность. Если заряд располагается в среде с меньшей проницаемостью, то с ним происходит следующее: 1) притягиваясь к границе, он пересекает ее; 2) попав в другую среду, начинает отталкиваться от границы, удаляясь от нее на бесконечность. Таким образом, для возникновения силы, действующей на заряд, помещенный в неоднородную среду (в которой  $\epsilon \neq \text{const}$ ), нет необходимости в присутствии других сторонних зарядов. Заряд сам создаст поляризационные заряды и с ними же провзаимодействует. При желании, формулу для  $F_1^*$  можно даже трактовать как «закон Кулона для взаимодействия заряда  $q_1$  с самим собой», но лучше, конечно, этого не делать.

Рассмотренный пример важен для понимания роли поляризационных зарядов в возникновении сил, приложенных к границе раздела двух сред и меняющих направление в зависимости от соотношения  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Направлены эти силы всегда в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью. Например, при нахождении диэлектрического тела в воздухе ( $\epsilon = 1,0006$ ) силы в различных точках его поверхности всегда направлены во внешнюю сторону. Так как суммарный поляризационный заряд тела равен

нулю, то в однородном поле результирующая всех сил, приложенных к нейтральному телу, равна нулю (рис.4,а). В неод-

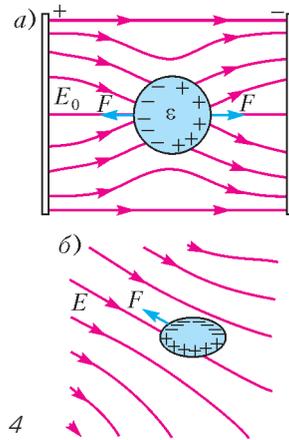


Рис. 4

нородном же электрическом поле диэлектрик всегда стремится переместиться в область, где напряженность выше (рис.4,б).

С проявлением этих эффектов мы иногда сталкиваемся в повседневной жизни. Так, приобретает заряд в процессе расчесывания волос, расческа стремится притянуть к себе мелкие диэлектрики – например, листки бумаги. Нельзя не вспомнить здесь и о древних греках, с удивлением и восторгом наблюдавших за первым электростатическим опытом в истории человечества – загадочным притяжением мелких кусочков дерева к натертому янтарию.

На рисунке 5 показаны схемы двух простых экспериментов, позволяющих опре-

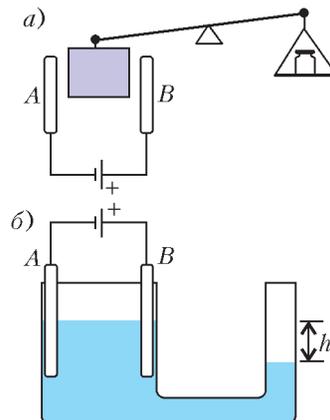


Рис. 5

делить величины сил втягивания твердого (а) и жидкого (б) диэлектриков в область с более сильным полем. В случае жидкого диэлектрика величину эффекта можно оценить по степени нарушения установившегося первоначально равенства уровней в двух сообщающихся сосудах.

Если события разворачиваются не в воздухе, а в среде с проницаемостью, большей проницаемости помещенного в нее тела, то диэлектрик выталкивается в область слабого поля. На рисунке 6 представлена

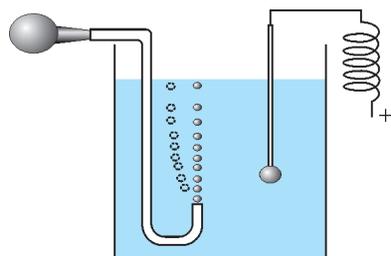


Рис. 6

схема эксперимента, иллюстрирующего такое выталкивание. Вертикальное всплывание пузырьков воздуха вверх в дистиллированной воде ( $\epsilon = 81$ ) в присутствии поля сменяется их отклонением в сторону от заряженного шарика. Отметим, что знак заряда шарика, создающего неоднородное поле, роли не играет.

Смена направления силы, действующей на диэлектрический объект, в зависимости от соотношения его проницаемости ( $\epsilon_1$ ) и проницаемости среды ( $\epsilon_2$ ), в которую он помещен, хорошо демонстрирует эксперимент с парафиновым ( $\epsilon_1 = 2$ ) шариком. При нахождении шарика в воздухе ( $\epsilon_1 > \epsilon_2 \approx 1$ ) силы в разных точках его поверхности всегда направлены во внешнюю сторону и максимальны в ближайших к заряженному металлическому шару частях поверхности. В результате возникает эффект притяжения диэлектрика к зарядам, создающим поле (рис.7,а). Если же поместить оба шарика в ацетон ( $\epsilon_1 < \epsilon_2 \approx 21$ ), то притяжение сменяется отталкиванием (рис.7,б). Проведенный в примере 4 анализ позволяет нам понять такое своеобразное поведение шарика – силы, действующие на него, определяются поляризационными зарядами как самого

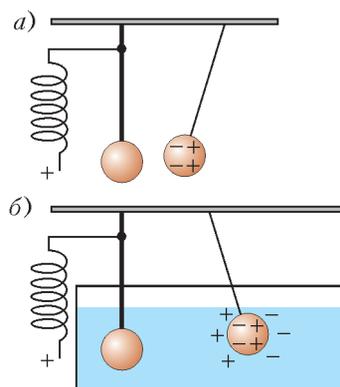


Рис. 7

шарика, так и окружающей среды. А изменение направления результирующей силы связано со сменой знака суммарного поляризационного заряда на границе тела со средой. При нахождении шарика в однородном поле (например, плоского конденсатора) силы в различных точках его поверхности уравниваются и никакого смещения шарика в обоих случаях наблюдаться не будет.

В общем случае в неоднородной среде (или в присутствии отдельных фрагментов однородных диэлектриков) невозможно установить сколь-нибудь простые выражения для сил, действующих даже на точечные заряды. Более того, присутствие около заряженных тел диэлектрических объектов не должно обязательно приводить к ослаблению сил, действующих на тела (тем более в  $\epsilon$  раз), а может даже способствовать их увеличению.

Рассмотрим пример, подтверждающий это.

**Пример 5.** Как изменится сила взаимодействия между двумя точечными зарядами в воздухе, если между ними поместить диэлектрический шарик?

Мы уже знаем, что сила электростатического взаимодействия между зарядами никак не изменится, а останется равной кулоновской. А вот результирующие силы, действующие на заряды, изменятся – именно их и имеют обычно в виду, задавая приведенный в условии вопрос. Даже в случае максимального упрощения условия задачи, когда заряды равны по величине и расположены симметрично относительно

шарика, школьных знаний для ответа на вопрос нам не хватит. Но формулы, содержащие ответ на поставленный вопрос, конечно, уже давно получены – только выглядят они весьма громоздко. Поэтому ограничимся качественным описанием конечных результатов для двух вариантов знаков зарядов.

а) *Заряды одинаковых знаков.* В поле зарядов шарик поляризуется – на его поверхности появляются поляризационные заряды. Хотя суммарный заряд диэлектрического шарика остается равным нулю, на ближайших к зарядам  $q_1$  и  $q_2$  частях его поверхности находится поляризационный заряд противоположного им знака (рис.8). Вследствие этого к силе

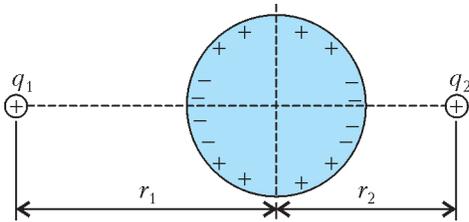


Рис. 8

кулоновского отталкивания  $\vec{F}_0$  зарядов добавляется сила  $\vec{F}_{\text{пол}}$  их взаимодействия с поляризационными зарядами. Так как  $\vec{F}_{\text{пол}}$  направлена противоположно  $\vec{F}_0$ , то отталкивание точечных зарядов уменьшается. В случае, например, парафинового шарика ( $\epsilon_1 = 2$ ) радиусом  $R$  это приводит к тому, что на расстоянии между зарядами  $r \approx 3,2R$  величина суммарной силы, действующей на них, обращается в ноль. На меньших расстояниях  $F_{\text{пол}} > F_{\text{к}}$ , и отталкивание частиц сменяется их притяжением, быстро возрастающим по мере приближения зарядов к поверхности шара ( $F \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 2R$ ).

б) *Заряды разных знаков.* В этом случае поляризация шарика, в силу указанных выше причин, всегда приводит к появлению добавочной силы  $\vec{F}_{\text{пол}}$ , совпадающей по направлению с кулоновской силой притяжения  $\vec{F}_0$ . В итоге результирующая сила, действующая на заряды, возрастает при любых расстояниях между ними. Например, при расстоянии  $r \approx 4R$  (где  $R$  –

радиус парафинового шарика) она составляет  $F \approx 1,3F_0$ , а при  $r \rightarrow 2R$ , конечно, неограниченно возрастает.

Заметим, что каждый из зарядов в отсутствие другого заряда будет всегда притягиваться к незаряженному шарикау.

Нетрудно сообразить, что при размещении зарядов и парафинового шарика в жидком диэлектрике с  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ , например в ацетоне, все происходит наоборот – отталкивание одноименных зарядов всегда увеличивается, а притяжение разноименных может смениться на определенных расстояниях отталкиванием.

Последние примеры подтверждают, что нельзя относиться к диэлектрической проницаемости среды как к параметру, характеризующему ее способность только ослаблять электрические взаимодействия – это, как мы видим, не всегда так.

А как изменяются силы, действующие на заряженные тела, при их помещении в твердые диэлектрики? Ведь последние, в отличие от жидкости и газа, сами места зарядам уступать не собираются – для них надо создавать специальные полости. Но появившиеся на поверхности полости поляризационные заряды могут существенным образом повлиять на напряженность поля в ней. Кроме того, величина поляризованного заряда и его поле существенно зависят от формы создаваемой полости.

Пусть в определенной области пустого пространства создано однородное поле с напряженностью  $E_0$ . После заполнения области диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$  напряженность уменьшается до значения  $E = \frac{E_0}{\epsilon}$ . Выражения для напряженностей в полостях симметричной конфигурации, оставляющих поле внутри себя однородным, приведены на рисунке 9. Напряженность в полости  $A$  (узкая щель, перпендикулярная линиями напряженности) возрастает в  $\epsilon$  раз по сравнению с той, что была в диэлектрике ранее. Вырезание полости  $B$  (узкая щель, параллельная линиям напряженности) не меняет напряженность поля. Поляризационные заряды на поверхности сферической полости  $C$  вы-

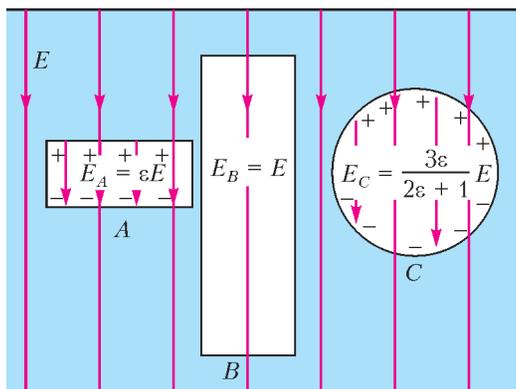


Рис. 9

зыают возрастание напряженности в ней в  $\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1}$  раз.

Теперь мы можем рассмотреть, как взаимодействуют наши любимые точечные заряды в твердом диэлектрике.

**Пример 6.** Два точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$  находятся на расстоянии  $r$  друг от друга в центрах малых сферических полостей в твердом диэлектрике с проницаемостью  $\varepsilon$ . Найдите силы, действующие на заряды.

Из-за малости полости, в которой расположен заряд  $q_2$ , поле от заряда  $q_1$  в ней можно считать однородным. А так как полость сферическая (соответствует случаю C на рисунке 9), то напряженность поля в ней равна

$$E_1 = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1} \cdot k \frac{q_1}{r^2},$$

и, следовательно, на заряд  $q_2$  действует сила

$$F_2 = q_2 E_1 = \frac{3}{2\varepsilon + 1} F_0. \quad (4)$$

Она меньше кулоновской силы  $F_0$  в пустоте, но в  $\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1}$  раз превосходит силу, действующую на заряд в жидкости с такой же диэлектрической проницаемостью. Легко показать, что равная по величине сила будет действовать и на заряд  $q_1$ .

Отметим, что все рассмотренное верно для зарядов, помещенных в центры сферических полостей, когда отсутствует поле от добавочных поляризационных зарядов, индуцированных самим зарядом. Иначе влияние этого поля тоже надо учитывать –

заряды могут взаимодействовать сами с собой (как в примере 4) и все усложняется.

Хотя формула (4) и является аналогом закона Кулона для случая взаимодействия точечных зарядов в твердой диэлектрической среде, физическое содержание ее несколько иное. Изменение сил, действующих на заряды, по сравнению с вакуумом обусловлено появлением в диэлектрике поляризаационных зарядов, поле которых теперь зависит как от свойств среды, так и от геометрии полости и ее ориентации относительно поля в среде. Были бы другие полости – был бы другой «закон Кулона»!

Как следует из выражения (4), при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  силы, действующие на заряды, стремятся к нулю. Диэлектрическая среда становится столь подагливой, что начинает вести себя, как проводящая, и полностью убивает (экранирует) электростатическое взаимодействие зарядов. Здесь мы сталкиваемся с известным (и очень полезным при решении ряда задач) свойством проводников – в электростатике их можно рассматривать как тела с бесконечной проницаемостью.

В заключение еще раз подчеркнем, что электростатическая сила взаимодействия между точечными зарядами от присутствия среды никак не зависит – она продолжает определяться единственным и неповторимым законом Кулона в пустоте (1). А вот чтобы найти полную силу, действующую на заряд, помещенный в среду, надо очень постараться!

В рассмотренных примерах заряды располагались симметричным образом в средах с хорошими характеристиками – неизменная диэлектрическая проницаемость, плоская граница раздела, сферические полости. Поэтому и влияние среды на взаимодействие зарядов удалось оценить с помощью относительно простых соотношений. В общем же случае сделать это непросто – часто только численными методами. И для старшеклассников, стремящихся в дальнейшем связать свою жизнь с техническими науками, лучше уже сейчас иметь представление о том, как все происходит «на самом деле».

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2510–М2513 предлагались на XXXIX Турнире городов.

## Задачи М2510–М2513, Ф2517–Ф2520

**М2510.** Точка  $O$  – центр описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$ ,  $AH$  – его высота (рис.1). Точка  $P$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на прямую  $CO$ . Докажите, что прямая  $HP$  проходит через середину стороны  $AB$ .

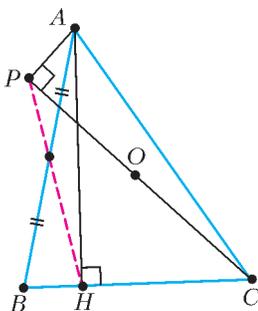


Рис. 1

Е.Бакаев

**М2511.** Существуют ли такие 2018 несократимых дробей с натуральными числителями и различными натуральными знаменателями, что знаменатель разности любых двух из них после приведения к несократимому виду окажется меньше знаменателя любой из исходных 2018 дробей?

М.Дидин

**М2512.** Дано натуральное число  $n > 1$ . Что больше: количество способов разрезать клетчатый квадрат  $3n \times 3n$  на клетчатые прямоугольники  $1 \times 3$  или количество способов разрезать клетчатый квадрат  $2n \times 2n$  на клетчатые прямоугольники  $1 \times 2$ ?

В.Брагин

**М2513.** В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками

«!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение  $a?b$  обозначает одно из следующих:  $a - b$ ,  $b - a$  или  $a + b$ . Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные  $a$ ,  $b$  и скобки есть и используются, как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков «!», «?» записать выражение, которое гарантированно равно  $20a - 18b$ .

Н.Белухов (Болгария)

**Ф2517.<sup>1</sup>** Тело бросили под углом  $\alpha$  к горизонту. Найдите угол  $\beta$ , образуемый с горизонтом радиусом-вектором этого тела, проведенным из точки бросания, к тому моменту, когда скорость тела будет перпендикулярна начальной. Соппротивлением воздуха пренебречь.

**Ф2518.** При накачивании автомобильной шины ручным насосом каждая порция атмосферного воздуха, оказавшаяся в нем, сжимается поршнем до уровня давления в шине, после чего вкачивается внутрь. Определите теплоемкость газа в процессе сжатия, если подкачка производится при нормальных условиях, температура поступающего в шину воздуха  $t = 40^\circ\text{C}$ , объем насоса  $V = 0,55$  л, а произведенная

<sup>1</sup> Автор задач Ф2517–Ф2520 – С.Крюков.

над газом работа  $A = 60$  Дж. Молярную теплоемкость воздуха при постоянном объеме принять равной  $C_V = 2,5R$ .

**Ф2519.** Конденсаторы емкостями  $C_1, C_2, \dots, C_n$  заряжают до напряжений  $U_1, U_2, \dots, U_n$  соответственно (при этом суммарный заряд пластин каждого конденсатора, естественно, равен нулю). Затем из конденсаторов образуют последовательную цепочку, свободные концы которой соединяют друг с другом. Найдите заряд  $q$ , прошедший по цепи.

**Ф2520.** На сферическую границу раздела двух сред падает произвольный (приосевой) луч. На рисунке 2 граница раздела

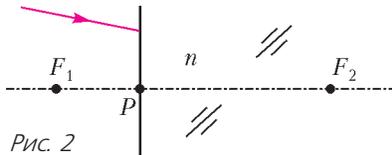


Рис. 2

сред аппроксимирована (приосевое приближение) плоскостью, пересекающей ось системы в точке  $P$ . Постройте дальнейший ход луча, если заданы передний  $F_1$  и задний  $F_2$  фокусы системы для выбранной оси.

**Решения задач M2498–M2501, Ф2505–Ф2508**

**M2498.** На доске написаны 100 попарно различных положительных чисел. Для каждой пары написанных чисел вычислили их сумму. У какого наибольшего количества пар эта сумма может найтись среди написанных на доске чисел?

**Ответ:** 2450.

Пару выписанных чисел, для которой сумма также выписана, назовем *хорошей*.

*Пример.* Примером может служить множество 1, 2, ..., 100. Здесь хорошими являются все пары с суммой не более 100. Запишем все хорошие пары и подсчитаем их количество: (99, 1) (одна пара); (98, 1), (98, 2) (две пары); (97, 1), (97, 2), (97, 3) (три пары); ...; (51, 1), (51, 2), ..., (51, 49) (49 пар); а также все пары чисел из множества {1, 2, ..., 50} (еще  $C_{50}^2$  пар). Итого, в нашем примере

$$1 + 2 + \dots + 49 + \frac{50 \cdot 49}{2} = 50 \cdot 49 = 2450 \text{ хороших пар.}$$

*Оценка.* Пусть  $x_1 > x_2 > \dots > x_{100} > 0$  – выписанные на доске числа. Рассмотрим пары вида  $(x_1, x_k)$ . Поскольку  $x_1 + x_k > x_1$ , ни одна из таких пар не является хорошей. Рассмотрим пары вида  $(x_2, x_k)$ , где  $k > 2$ . Поскольку все суммы  $x_2 + x_k$  принимают различные значения, большие  $x_2$ , среди них хорошей парой может быть только пара с суммой, равной  $x_1$ . Таким образом, среди пар вида  $(x_2, x_k)$ , где  $k > 2$ , не более одной хорошей пары.

Аналогично, при фиксированном  $t$  среди пар вида  $(x_t, x_k)$ , где  $k > t$ , не более  $t - 1$  хороших пар, так как суммы в хороших парах указанного вида могут быть равны только числам  $x_1, \dots, x_{t-1}$ .

Итак, среди пар вида  $(x_t, x_k)$ , где  $k > t$ ,  $t \leq 50$ , суммарно не более  $1 + 2 + \dots + 49 = \frac{50 \cdot 49}{2}$  хороших пар. Количество оставшихся пар  $(x_t, x_k)$ , где  $k > t \geq 51$ , равно  $\frac{50 \cdot 49}{2}$ .

Таким образом, общее количество хороших пар не превышает  $50 \cdot 49 = 2450$ . Задача решена.

Заметим, что оценку можно доказать и другим способом, используя следующее соображение: фиксированное число  $x_m$  может равняться сумме для не более чем  $\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$  пар.

П.Кожевников

**M2499.** Верно ли, что у любого тетраэдра есть сечение, являющееся равнобокой трапецией?

**Ответ:** неверно.

Заметим вначале, что сечение тетраэдра, являющееся трапецией или параллелограммом, обязательно параллельно некоторому ребру. Действительно, в тетраэдре  $ABCD$  рассмотрим сечение  $KLMN$  такое, что  $KL \parallel MN$ , а вершины  $K, L, M, N$  лежат, соответственно, на ребрах  $AB, BC, CD, DA$ . Если плоскость  $KLMN$  пересекает прямую  $AC$  в некоторой точке  $X$ , то эта точка является общей точкой плоскостей

$KLMN$  и  $ABC$ , значит,  $X$  лежит на прямой  $KL$ . Аналогично,  $X$  лежит на прямой  $MN$ , что противоречит параллельности  $KL$  и  $MN$ . Значит, плоскость  $KLMN$  параллельна прямой  $AC$ , откуда  $KL \parallel AC \parallel MN$ . Теперь докажем такую лемму.

**Лемма.** Пусть в тетраэдре  $ABCD$  выполнено  $AB < BC$  и  $CD < AD$ . Тогда в нем не может быть сечения, являющегося равнобокой трапецией и параллельного ребру  $AC$  (или  $BD$ ).

**Доказательство.** Предположим противное – пусть нашлось такое сечение  $KLMN$ , что вершины  $K, L, M, N$  лежат на ребрах  $AB, BC, CD, DA$  соответственно, и  $KLMN$  – равнобокая трапеция,  $KL \parallel MN \parallel AC$ . Далее обозначим через  $P, Q, R$  середины отрезков  $KL, AC, MN$  соответственно (см. рисунок), и пусть  $B', P', D', R'$  – проекции соответственно точек  $B, P, D, R$  на прямую  $AC$ . Так как  $AB < BC$ , то  $AB' < B'C$ , поэтому точка  $B'$  лежит на луче  $QA$ . Поскольку точка  $P$  лежит на отрезке  $QB$ , точка  $P'$  лежит на отрезке  $QB'$  и, следовательно,  $P'$  лежит на луче  $QA$ . Аналогично, из условия  $CD < AD$  следует, что  $R'$  лежит на луче  $QC$ . Отсюда, в частности, видим, что точки  $P'$  и  $R'$  не могут совпадать. Прямая  $PR$  является осью симметрии равнобокой трапеции  $KLMN$ , откуда  $PR \perp KL$  и, значит,  $PR \perp AC$ . Но в таком случае проекции  $P'$  и  $R'$  на прямую  $AC$  должны совпадать. Противоречие. Лемма доказана.

В тетраэдре  $ABCD$  условно назовем пару скрещивающихся ребер  $AB$  и  $CD$  первой парой, пару  $AC$  и  $BD$  – второй парой и

пару  $AD$  и  $BC$  – третьей парой. Предположим, что у нас есть тетраэдр, в котором любое ребро из первой пары короче, чем любое ребро из второй пары, а любое ребро из второй пары в свою очередь короче любого ребра из третьей пары. Тогда из леммы следует, что в таком тетраэдре ни для какого ребра нет сечения, являющегося равнобокой трапецией и параллельного этому ребру. Нужные нам тетраэдры существуют. Например, подходит равногранный (вписанный в прямоугольный параллелепипед) тетраэдр  $ABCD$ , в котором  $AB = CD < AC = BD < AD = BC$ . Можно обобщить нашу лемму и доказать следующие необходимые и достаточные условия существования сечения, являющегося равнобокой трапецией и параллельного ребру  $AC$ . Такое сечение существует в точности в следующих случаях: 1)  $AB = BC$  и  $AD = DC$ ; 2)  $AB < BC, AD < DC$  и  $BD$  не перпендикулярно  $AC$ ; 3)  $AB > BC, AD > DC$  и  $BD$  не перпендикулярно  $AC$ . (В случае  $AC \perp BD$  существуют прямоугольные сечения, параллельные  $AC$ .)

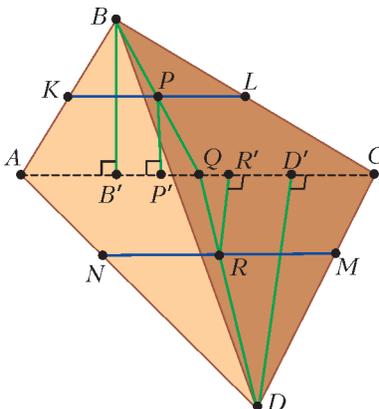
Пользуясь этим, можно указать и другие классы тетраэдров, в которых нет сечения в форме равнобокой трапеции. Например: пирамида  $ABCD$ , в основании которой лежит правильный треугольник  $ABC$ , а боковые ребра  $AD, BD, CD$  не равны друг другу; ортоцентрический тетраэдр  $ABCD$  (т.е. в котором  $AB \perp CD, AC \perp BD, AD \perp BC$ ) без равных ребер.

В.Лецко, П.Кожевников

**M2500\***. Решение этой задачи будет опубликовано позже.

**M2501.** Пусть даны натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , удовлетворяющие условию: для любых  $1 \leq i < j \leq n$  число  $j - i$  делится на  $\text{НОД}(a_i, a_j)$ . Докажите, что найдется натуральное  $N$  такое, что  $N + i$  делится на  $a_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Обозначим через  $P$  множество простых чисел, на которые делится хотя бы одно из чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Рассмотрим некоторое простое число  $p \in P$ . Среди чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  выберем то, которое делится



на наибольшую степень  $p$  (если таких чисел несколько, то выберем любое из них). Пусть это число  $a_{m(p)}$  и  $p$  входит с кратностью  $\alpha(p)$  в разложение числа  $a_{m(p)}$ . Таким образом определим  $a_{m(p)}$  и  $\alpha(p)$  для каждого простого  $p \in P$ .

Покажем, что найдется натуральное  $N$  такое, что  $N + m(p)$  делится на  $p^{\alpha(p)}$  для всех  $p \in P$ . Напомним китайскую теорему об остатках: для любых попарно взаимно простых чисел  $b_1, \dots, b_k$  и любых целых  $r_1, \dots, r_k$  система сравнений  $x \equiv r_1 \pmod{b_1}, \quad x \equiv r_2 \pmod{b_2}, \quad \dots$   
 $\dots, x \equiv r_k \pmod{b_k}$  имеет решение в целых числах. Воспользуемся китайской теоремой для сравнений вида  $x \equiv -m(p) \pmod{p^{\alpha(p)}}$ ,  $p \in P$ . Если требуется, прибавим к частному решению  $x$  этой системы сравнений достаточное количество раз произведение всех чисел вида  $p^{\alpha(p)}$  и получим искомое натуральное  $N$  такое, что  $N \equiv -m(p) \pmod{p^{\alpha(p)}}$ , или, эквивалентно,  $N + m(p) : p^{\alpha(p)}$ .

Оказывается, найденное  $N$  удовлетворяет условию задачи. Докажем, что  $N + i$  делится на  $a_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ . Рассмотрим любой простой делитель  $q$  числа  $a_i$ . Пусть  $q$  входит в разложение  $a_i$  с кратностью  $\gamma$ . Достаточно показать, что  $N + i$  делится на  $q^\gamma$ . Для данного  $q$  рассмотрим определенные выше  $m = m(q)$  и  $\alpha = \alpha(q)$ . Мы уже знаем, что  $N + m$  делится на  $q^\alpha$  и, следовательно, на  $q^\gamma$  (согласно определению,  $\alpha \geq \gamma$ ). По условию задачи,  $i - m$  делится на  $\text{НОД}(a_i, a_m)$  (это верно и при  $i = m$ ), а  $\text{НОД}(a_i, a_m)$  в свою очередь делится на  $q^\gamma$  (так как оба числа  $a_i, a_m$  делятся на  $q^\gamma$ ). Тогда  $N + i = (N + m) + (i - m)$  делится на  $q^\gamma$ , что и требовалось. Задача решена.

Отметим, что обратное утверждение к утверждению задачи почти очевидно: если  $N + i$  делится на  $a_i$  (для каждого  $i$ ), то  $j - i = (N + j) - (N + i)$  делится на  $\text{НОД}(a_i, a_j)$ . Сама задача возникла как обобщение задачи осеннего тура Турнира городов 2017 года и задачи Конкурса имени А.П.Савина (см. «Квант» №1). В пер-

вой из этих задач нужно было доказать существование такого  $N$ , чтобы  $N + i$  делилось на  $101 - i$  для  $i = 1, 2, \dots, 100$ , а во второй – чтобы  $N + i$  делилось на  $2i + 1$  для  $i = 1, 2, \dots, 100$ .

П.Кожевников

**Ф2505.** На рисунке 1 изображена висячая неподвижно однородная цепочка длиной  $L = 3$  м. Один ее конец закреплен на стене, а на другой конец действует сила

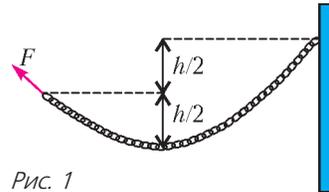


Рис. 1

$F = 50$  Н. Нижняя точка цепочки находится ниже места крепления к стене на  $h = 1$  м и ниже второго конца цепочки на  $h/2 = 0,5$  м. Какова масса цепочки? С какой силой натянута цепочка в самой нижней точке?

Обозначим вертикальные составляющие сил натяжения цепочки вблизи ее концов буквами  $x$  и  $y$ , а горизонтальную составляющую сил натяжения – буквой  $z$ . Тогда можно через них выразить массу цепочки и силы натяжения на ее концах. С массой это сделать просто:

$$M = \frac{x + y}{g}$$

Кусок цепочки между нижней точкой и любым из двух концов находится в равновесии. Добавим, например, к левому куску кусок цепочки с таким же отношением  $M/L$  и расположим его так, как показано на рисунке 2. Имеется горизонтальный участок, лежащий на гладкой поверхности, и вертикальный участок длиной  $h$  между маленькими блоками без трения в осях. Из условия равновесия такой замкнутой цепочки следует, что разница сил натяжения на конце и в нижней точке равна  $(M/L)gh/2$ :

$$F_1 = F = \sqrt{x^2 + z^2} = z + \frac{M}{L} g \frac{h}{2}.$$

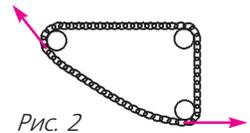


Рис. 2

Аналогично, для правого куска цепочки получаем

$$F_2 = \sqrt{y^2 + z^2} = z + \frac{M}{L} gh.$$

Имеем три уравнения с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{x^2 + z^2}, \\ \sqrt{x^2 + z^2} &= z + \frac{(x+y)h}{2L}, \\ \sqrt{y^2 + z^2} &= z + \frac{(x+y)h}{L}. \end{aligned}$$

Будем преобразовывать эту систему уравнений так, чтобы найти неизвестные:

$$\begin{aligned} \frac{(x+y)h}{2L} &= F - z, \\ 2(F - z) + z &= 2F - z = \sqrt{y^2 + z^2}, \\ y^2 &= 4F^2 - 4Fz, \\ x^2 &= F^2 - z^2, \\ x^2 + z^2 &= F^2 = 5F^2 - 4Fz - z^2. \end{aligned}$$

Отсюда находится искомая величина силы натяжения в самой нижней точке:

$$z = 2(\sqrt{2} - 1)F \approx 0,828F \approx 41,4 \text{ Н}.$$

Теперь можно найти  $x$  и  $y$ :

$$x = \sqrt{1 - 4(\sqrt{2} - 1)^2} F \approx 0,56F = 28 \text{ Н},$$

$$\begin{aligned} y &= 2\sqrt{F^2 - Fz} = 2(1 - 2(\sqrt{2} - 1))F \approx \\ &\approx 0,343F \approx 17,16 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Отсюда же находится и масса цепочки:

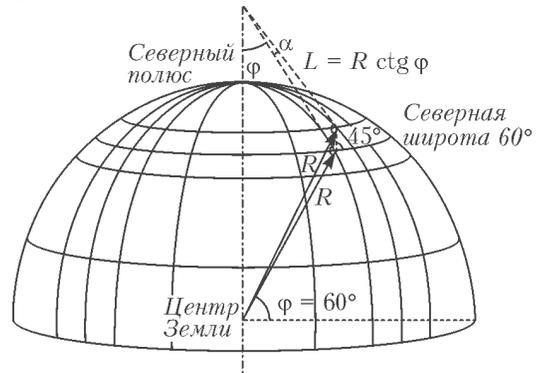
$$M = \frac{x+y}{g} = (0,56 + 0,343) \frac{F}{g} \approx 4,5 \text{ кг}.$$

Ц.Почкин

**Ф2506.** По поверхности стоящего неподвижно небольшого школьного глобуса радиусом  $R = 9$  см бежит маленький таракан с постоянной по величине скоростью  $v = 3$  см/с. По отношению к разметке глобуса его скорость все время направлена на северо-восток. Каково по величине ускорение таракана в тот момент, когда он наступает на кружочек, соответствующий положению Санкт-Петербурга ( $\varphi = 60^\circ$  северной широты)?

По условию задачи, скорость таракана постоянна по модулю, поэтому проекция ускорения на направление скорости равна нулю. Вектор скорости таракана поворачивается как в плоскости, касательной к поверхности глобуса в той точке, где находится таракан в данный момент, так и в плоскости, которая задается мгновенной скоростью таракана и точкой, соответствующей центру глобуса. Эти две плоскости взаимно перпендикулярны, поэтому, вычислив проекции ускорения на направления, перпендикулярные скорости и находящиеся в этих плоскостях, можно найти и величину ускорения.

На рисунке показаны касательные к двум соседним меридианам и расположение таракана в момент, когда он находится на



интересующей нас 60-й параллели. Ясно, что проекция ускорения на направление к центру глобуса равна

$$a_1 = \frac{v^2}{R}.$$

Найдем вторую проекцию ускорения – на плоскость, касательную к поверхности глобуса. Пусть прошел небольшой промежуток времени  $\tau$ , за этот промежуток таракан сместился на расстояние  $v\tau/\sqrt{2}$  в направлении на восток (и на такое же расстояние на север) и оказался на другом меридиане. Если провести касательные к этим меридианам (в точках, где находился таракан) вдоль поверхности глобуса, то они пересекут линию, проходящую через полюс глобуса (и через центр Земли), на близких по величине расстояниях

$$L = R \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Соответственно, угол между этими касательными будет равен

$$\alpha = \frac{v\tau/\sqrt{2}}{L} = \frac{v\tau}{R}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Именно на такой угол повернулась скорость таракана в касательной плоскости. Отсюда находим вторую проекцию ускорения:

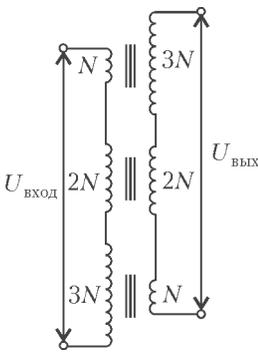
$$a_2 = \frac{\alpha v}{\tau} = \frac{v^2}{R}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

В итоге величина ускорения таракана будет равна

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \frac{v^2}{R}\sqrt{1 + \frac{3}{2}} \approx 1,58 \text{ см/с}^2.$$

Т.Глобусов

**Ф2507.** На три одинаковых сердечника намотали одинаковое количество витков



провода  $4N$ , которые по-разному распределены между первичными и вторичными обмотками. Все три трансформатора соединили в цепь, показанную на рисунке. Никакой нагрузки во вторичной цепи нет. Каким по модулю

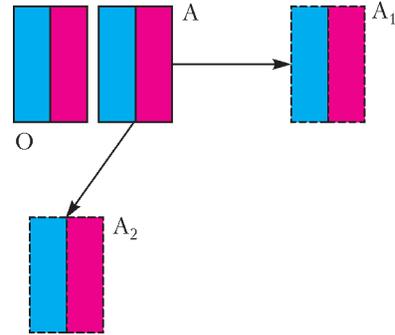
может быть отношение выходного напряжения  $U_{\text{ВЫХ}}$  к входному напряжению  $U_{\text{ВХОД}}$ ?

Поскольку по условию сердечники всех трех трансформаторов одинаковые, то индуктивности первичных обмоток этих трансформаторов, соединенных последовательно во входной цепи, относятся как 1:4:9 (сверху вниз). (Как известно, индуктивность катушки пропорциональна квадрату числа витков в ее обмотке.) В такой же пропорции между первичными обмотками поделится и входное напряжение. На выходе в таком же порядке (сверху вниз) напряжения будут составлять от первичного напряжения части  $3/14$ ,  $4/14$  и  $3/14$  соответственно. Когда напряжения последовательно соединенных вторичных обмо-

ток складываются, то любое из них может совпадать по фазе с входным напряжением или быть с ним в противофазе (сдвиг фаз на  $180^\circ$ ) – это зависит от того, совпадают или нет направления намотки проводов в первичной и вторичной обмотках. В результате отношение выходного напряжения к входному может принимать (по модулю) три возможных значения:  $1/7$ ,  $2/7$ ,  $5/7$ .

С.Варламов

**Ф2508.** На рисунке показано начальное положение двух одинаковых постоянных



магнитов  $O$  и  $A$ , а также различные конечные положения  $A_1$  и  $A_2$  магнита  $A$ . Магнит  $O$  закреплен неподвижно. Магнит  $A$  медленно переместили в положение  $A_1$ , затем его вернули на прежнее место и медленно переместили в положение  $A_2$ . При каком перемещении магнита  $A$ : в положение  $A_1$  или  $A_2$  работа внешних сил больше? Величины перемещений одинаковы и значительно больше размеров магнитов. Красный цвет соответствует южному полюсу магнита, а синий цвет – северному полюсу.

Хотя перемещения магнита  $A$  в положения  $A_1$  и  $A_2$  одинаковы по величине, это не означает, что потенциальная энергия взаимодействия магнитов  $O$  и  $A$  изменилась одинаково. Любое расположение неподвижных магнитов может быть охарактеризовано потенциальной энергией их взаимодействия, так как для удержания магнитов в покое требуется прикладывать к ним внешние силы и моменты сил. Эта энергия зависит от взаимного расположения и ориентации магнитов в пространстве. (Об

этом подробно рассказывалось в статье С.Варламова «В защиту магнитных зарядов и магнитных диполей» в прошлом номере журнала. – *Прим ред.*)

За начало отсчета потенциальной энергии удобно принять положение, когда магниты удалены друг от друга на очень большое (бесконечно большое) расстояние. Расположенные рядом магниты в начальном положении имеют отрицательную потенциальную энергию взаимодействия, так как они притягиваются друг к другу. (Северный полюс одного магнита находится ближе к южному полюсу другого магнита,

чем к его северному полюсу.) После перемещения магнита  $A$  в положение  $A_1$  магниты продолжают притягиваться, т.е. потенциальная энергия остается отрицательной, но становится меньшей по величине. В случае же перемещения магнита  $A$  в положение  $A_2$  потенциальная энергия взаимодействия магнитов становится положительной, так как при таком взаимном расположении магниты отталкиваются друг от друга. Следовательно, во втором случае внешние силы совершили большую работу.

*В.Магнитов*

### О кратности покрытия ориентированными многоугольниками

*А.Канель-Белов, П.Кожевников*

Представим себе, что на плоском столе разбросали несколько многоугольных салфеток и каждая точка оказалась покрыта несколькими салфетками (возможно ни одной). Мы докажем некоторые интересные утверждения о кратности покрытия. В частности, мы приведем решение задачи М2493 из «Задачника «Кванта» («Квант» №12 за 2017 г.).

Начнем с понятия *ориентации* треугольника. Пусть на плоскости расположен треугольник  $ABC$ . Скажем, что векторы  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  образуют *ориентированный контур* треугольника  $ABC$ . Обойдем контур треугольника по векторам  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ . Если мы совершили обход треугольника против часовой стрелки, то скажем, что треугольник  $ABC$  ориентирован положительно, а в противном случае – отрицательно. Как видим, в этом определении очень важен *циклический* порядок, в котором перечисляются вершины треугольника. Поэтому далее считаем, что каждая из записей  $ABC$ ,  $BCA$ ,  $CAB$  обозначает один и тот же ориентированный треугольник, а каждая из записей  $BAC$ ,  $CBA$ ,  $ACB$  – другой. При этом, очевидно, ориентированные треугольники  $ABC$  и  $BAC$  имеют противоположную ориентацию (т.е.  $ABC$  положительно ориентирован тогда и только

ко тогда, когда  $BAC$  отрицательно ориентирован).

**Упражнение 1.** Определите ориентированный контур и ориентацию многоугольника  $A_1A_2\dots A_n$  на плоскости.

Рассмотрим на плоскости конечное семейство  $T$  ориентированных треугольников. Для каждой точки  $X$ , не лежащей на границах треугольников, такие точки далее будем называть *регулярными* для семейства  $T$ , можно определить *кратность покрытия* точки  $X$  семейством  $T$ : каждый треугольник семейства  $T$ , содержащий внутри себя точку  $X$ , будет давать вклад  $\pm 1$  в эту кратность, где знак «+» берется для положительно ориентированного треугольника, а знак «-» – для отрицательно ориентированного. Далее кратность покрытия точки  $X$  семейством  $T$  обозначаем через  $K_T(X)$ . Иными словами,  $K_T(X)$  показывает, сколько салфеток-треугольников накрывают точку  $X$ , только «отрицательно ориентированную салфетку» считаем «антисалфеткой», выкладывая которую, мы уменьшаем кратность покрытия точек под ней на 1. Формально, кратность покрытия ориентированным треугольником  $ABC$  равна (как функция, определенная во всех регулярных точках) *характеристической функции*  $\chi_{ABC}$ , где  $\chi_{ABC}(X)$  принимает значение 0 во всех точках  $X$  вне треугольника  $ABC$ , а для точки  $X$  внутри треугольника  $\chi_{ABC}(X) = \pm 1$ , в зависимости от ориентации треугольника. Тогда  $K_T$  есть функ-

ция (определенная во всех регулярных точках  $X$ ), равная сумме характеристических функций всех ориентированных треугольников семейства  $T$ .

**Упражнения**

2. Пусть точки  $A_1, \dots, A_7$  расположены, как показано на рисунке 1, а семейство  $T$  состоит из ориентированных треугольников  $A_1A_2A_3$ ,  $A_1A_3A_5$ ,  $A_3A_4A_5$ ,  $A_1A_5A_7$ ,  $A_5A_6A_7$ . Вычислите  $K_T(X)$  (для каждой из областей, на которые отрезки  $A_iA_j$  делят плоскость).

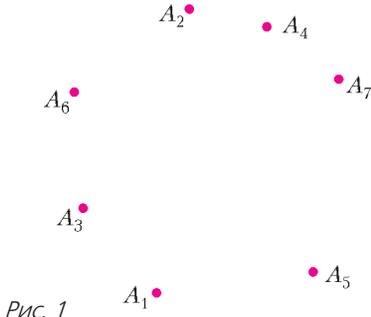


Рис. 1

3. Пусть  $A, B, C, D$  – произвольные точки общего положения (т.е. такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой), а семейство  $T$  состоит из ориентированных треугольников  $BCA, CBD, BAD, ACD$ . Докажите, что  $K_T = 0$  (т.е.  $K_T(X)$  равно 0 для всех регулярных точек  $X$ ). Иначе говоря, докажите равенство

$$\chi_{BCA} + \chi_{CBD} + \chi_{BAD} + \chi_{ACD} = 0. \quad (1)$$

4. Определите характеристическую функцию  $\chi_{A_1A_2\dots A_n}$  ориентированного многоугольника  $A_1A_2\dots A_n$ .

5. Докажите следующие равенства для выпуклого многоугольника  $A_1A_2\dots A_n$  и произвольной точки  $O$  внутри него:

$$\chi_{A_1A_2\dots A_n} = \chi_{A_nA_1A_2} + \chi_{A_nA_2A_3} + \dots + \chi_{A_nA_{n-2}A_{n-1}}, \quad (2)$$

$$\chi_{A_1A_2\dots A_n} = \chi_{OA_1A_2} + \chi_{OA_2A_3} + \dots + \chi_{OA_{n-1}A_n}. \quad (3)$$

Посмотрим на семейство  $T$  из упражнения 3. Заметим, что вектор  $\overline{AB}$  входит в ориентированный контур ровно одного из рассматриваемых ориентированных треугольников  $BCA, CBD, BAD, ACD$ . То же справедливо для вектора  $\overline{BA}$ . Ниже в теореме 1 мы сформулируем общий критерий того, что  $K_T = 0$ . Далее обозначим  $k(\overline{AB})$  количество вхождений вектора  $\overline{AB}$  в ориентированные контуры ориентиро-

ванных треугольников семейства  $T$  (так, в предыдущим примере с семейством  $BCA, CBD, BAD, ACD$  имеем  $k(\overline{AB}) = k(\overline{BA}) = 1$ ).

**Теорема 1.** Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – точки общего положения (никакие три из которых не лежат на одной прямой). Для данного набора  $M$  циклически упорядоченных троек индексов из множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  рассмотрим семейство  $T$  ориентированных треугольников  $A_iA_jA_k$ , где  $(i, j, k) \in M$ . Тогда  $K_T = 0 \Leftrightarrow$  для каждой пары индексов  $i, j$  ( $1 \leq i < j \leq n$ )  $k(\overline{A_iA_j}) = k(\overline{A_jA_i})$ .

**Доказательство.** Возьмем регулярную точку  $X$ . Начнем ее непрерывно перемещать по плоскости и следить, как будет изменяться  $K_T(X)$ . Пока  $X$  не дошла до границы какого-нибудь треугольника семейства  $T$ , кратность покрытия не изменяется, так как не меняется значение ни одной из характеристических функций  $\chi_{A_iA_jA_k}$ ,  $(i, j, k) \in M$ . Теперь рассмотрим момент «элементарной катастрофы», когда  $X$  пересекает ровно один из отрезков, соединяющий вершины треугольников, пусть это отрезок  $A_iA_j$  (рис.2). Посмотрим, для каких треугольников семейства  $T$  в момент катастрофы меняется статус, т.е. факт покрытия или не покрытия точки  $X$ . Это в точности ориентированные треугольники семейства  $T$ , у которых обе точки  $A_i$  и  $A_j$  являются вершинами, т.е. ориентированные треугольники вида  $A_iA_jY$  и  $A_jA_iZ$ . Для всех же остальных треугольников семейства  $T$  статус покрытия точки сохранится. Пусть всего в семействе  $T$  имеется  $y$  треугольников вида  $A_iA_jY$  (так что  $k(\overline{A_iA_j}) = y$ ), причем из них  $y_+$  положительно ориентированных и  $y_-$  отрицательно ориентированных треугольников. Аналогично, пусть имеется  $z$  ориентированных треугольников вида  $A_jA_iZ$  (так что  $k(\overline{A_jA_i}) = z$ ), среди которых  $z_+$  положительно ориентированных и  $z_-$  отрицательно ориентированных.

Пусть, для определенности, до катастрофы точка  $X$  расположена так, что треугольник  $A_iA_jX$  положительно ориентирован (а значит, после катастрофы будет

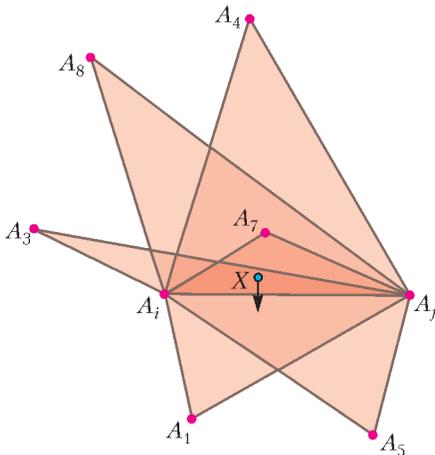


Рис. 2. Пусть в семействе  $T$  ориентированные треугольники вида  $A_i A_j Y : A_i A_j A_1, A_i A_j A_5, A_i A_j A_8$ , вида  $A_j A_i Z : A_i A_j A_4, A_j A_i A_3, A_j A_i A_7$ . Тогда на рисунке:  $y = 3, y_+ = 1, y_- = 2, z = 3, z_+ = 0, z_- = 3$

отрицательно ориентирован). Тогда до катастрофы кратность покрытия точки  $X$  ориентированными треугольниками вида  $A_i A_j Y$  и  $A_j A_i Z$  равна  $y_+ - z_-$ , а после катастрофы она равна  $z_+ - y_-$ . Итого после того, как  $X$  претерпевает катастрофу, изменение кратности  $K_T(X)$  составит  $(y_+ - z_-) - (z_+ - y_-) = (y_+ + y_-) - (z_+ + z_-) = y - z = k(\overline{A_i A_j}) - k(\overline{A_j A_i})$ .

Итак, если хотя бы для одной пары вершин  $A_i, A_j$  условие  $k(\overline{A_i A_j}) = k(\overline{A_j A_i})$  нарушится, то при пересечении точкой  $X$  отрезка  $A_i A_j$  кратность покрытия изменится, т.е. тождество  $K_T = 0$  не будет выполнено.

Наоборот, предположим теперь, что условие  $k(\overline{A_i A_j}) = k(\overline{A_j A_i})$  выполнено для всех пар вершин. Рассмотрим произвольную регулярную точку  $X$  и докажем, что  $K_T(X) = 0$ . Выберем некоторую регулярную точку  $X'$ , лежащую вне всех треугольников семейства  $T$ , т.е. для которой заведомо выполнено  $K_T(X') = 0$ . Можно непрерывно перемещать  $X'$  в  $X$  так, чтобы по пути случилось лишь конечное количество элементарных катастроф. Но, как мы видели, при каждой катастрофе кратность покрытия не изменится, поэтому  $K_T(X) = K_T(X') = 0$ .

Теорема доказана.

Обратим внимание на то, что в теореме 1 устанавливается, что условие  $K_T(X) = 0$  на самом деле эквивалентно некоторому комбинаторному условию на набор  $M$  циклически упорядоченных троек индексов. Получается, что условие  $K_T = 0$  не зависит от конфигурации точек общего положения  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ! Зафиксируем это утверждение.

**Теорема 2.** Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n; B_1, B_2, \dots, B_n$  — две конфигурации точек общего положения. Для набора  $M$  циклически упорядоченных троек индексов из множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  рассмотрим семейство  $T$  ориентированных треугольников  $A_i A_j A_k$ , где  $(i, j, k) \in M$ , и, аналогично, семейство  $T'$  ориентированных треугольников  $B_i B_j B_k$ , где  $(i, j, k) \in M$ . Тогда  $K_T = 0 \Leftrightarrow K_{T'} = 0$ .

Покажем некоторые сюжеты, в которых наши рассуждения могут быть полезны.

1) **Задача M2493.** Внутри треугольника  $A_1 A_2 A_3$  взяты точки  $A_4, A_5, \dots, A_n$  так, что среди точек  $A_1, \dots, A_n$  нет трех точек на одной прямой. Аналогично, внутри треугольника  $B_1 B_2 B_3$  взяты точки  $B_4, B_5, \dots, B_n$  так, что среди точек  $B_1, \dots, B_n$  нет трех точек на одной прямой. Дан набор  $M$  трехэлементных подмножеств множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Пусть  $A$  — множество треугольников вида  $A_i A_j A_k, i < j < k$ , где  $\{i, j, k\} \in M$ , аналогично,  $B$  — множество треугольников вида  $B_i B_j B_k, i < j < k$ , где  $\{i, j, k\} \in M$ . Известно, что треугольники множества  $A$  образуют разбиение треугольника  $A_1 A_2 A_3$ . Докажите, что любая точка, лежащая внутри треугольника  $B_1 B_2 B_3$ , не лежащая на сторонах треугольников множества  $B$ , покрыта нечетным количеством треугольников множества  $B$ .

**Решение.** Пусть треугольник  $A_1 A_2 A_3$  разбит на треугольники  $A_i A_j A_k$ , где  $\{i, j, k\} \in M$ . Не умаляя общности, будем считать, что  $A_1 A_2 A_3$  отрицательно ориентирован. Индексы в каждой тройке  $\{i, j, k\} \in M$  считаем упорядоченными так, что соответствующий треугольник  $A_i A_j A_k$  положительно ориентирован. Определим семейство ориентированных треугольни-

ков  $T$ : в  $T$  включим  $A_1A_2A_3$  и все ориентированные треугольники  $A_iA_jA_k$  вида  $\{i, j, k\} \in M$ . Тогда из условия «треугольники множества  $A$  образуют разбиение треугольника  $A_1A_2A_3$ » вытекает, что  $K_T = 0$ . Согласно теореме 2,  $K_{T'} = 0$  и для семейства  $T'$ , состоящего из  $B_1B_2B_3$  и всех треугольников вида  $B_iB_jB_k$ , где  $\{i, j, k\} \in M$ . Рассмотрим произвольную регулярную точку  $X$ , лежащую внутри треугольника  $B_1B_2B_3$ . Равенство  $K_{T'}(X) = 0$  означает, что среди ориентированных треугольников семейства  $T'$  поровну положительно ориентированных и отрицательно ориентированных, содержащих  $X$  внутри себя. Забудем теперь про ориентацию и сделаем отсюда такой вывод: точка  $X$  накрыта четным количеством «салфеток» из множества  $B$  с добавленной «салфеткой»  $B_1B_2B_3$ . Убирая «салфетку»  $B_1B_2B_3$ , мы изменяем четность, поэтому точка  $X$  накрыта нечетным количеством треугольников множества  $B$ . Задача решена.

2) Пусть  $B_1B_2 \dots B_n$  – ориентированный, возможно невыпуклый многоугольник. Покажем, что равенства (2) и (3) (и многие другие аналогичные равенства, очевидно верные для выпуклого многоугольника) *универсальны*, т.е. выполнены не только для выпуклого многоугольника  $A_1A_2 \dots A_n$  и при любом выборе точки плоскости  $O$ ; при этом можно допускать и тройки точек, лежащих на одной прямой, полагая характеристическую функцию вырожденного треугольника равной 0.

Покажем, например, как можно доказать универсальность равенства (2). Рассмотрим некоторое разбиение положительно ориентированного многоугольника  $B_1B_2 \dots B_n$  на треугольники, скажем возьмем некоторую его *триангуляцию* (разбиение на треугольники диагоналями, не имеющими общих внутренних точек)  $B_iB_jB_k$ , где  $\{i, j, k\} \in M$ . (Докажите, что любой невыпуклый многоугольник можно триангулировать!) Считаем треугольники  $B_iB_jB_k$  положительно ориентированными (этого можно достичь перенумерацией индексов). Тогда, очевидно,  $\chi_{B_1B_2 \dots B_n} = K_{T'}$ , где  $T'$  – семейство ориентированных треугольников  $B_iB_jB_k$ ,  $\{i, j, k\} \in M$ .

Далее возьмем вспомогательный выпуклый многоугольник  $A_1A_2 \dots A_n$  и рассмотрим семейство  $T$  ориентированных треугольников  $A_iA_jA_k$ , где  $\{i, j, k\} \in M$ . Нетрудно доказать, что треугольники семейства  $T$  образуют триангуляцию многоугольника  $A_1A_2 \dots A_n$ . Тогда верно равенство  $\chi_{A_1A_2 \dots A_n} = K_T$ . Но также для  $A_1A_2 \dots A_n$  верно равенство (2). Отсюда

$$K_T = \chi_{A_nA_1A_2} + \chi_{A_nA_2A_3} + \dots + \chi_{A_nA_{n-2}A_{n-1}},$$

или

$$K_T + \chi_{A_nA_2A_1} + \chi_{A_nA_3A_2} + \dots + \chi_{A_nA_{n-1}A_{n-2}} = 0.$$

По теореме 2, аналог последнего равенства верен и для конфигурации точек  $B_1, B_2, \dots, B_n$ :

$$K_{T'} + \chi_{B_nB_2B_1} + \chi_{B_nB_3B_2} + \dots + \chi_{B_nB_{n-1}B_{n-2}} = 0,$$

или

$$K_{T'} = \chi_{B_nB_1B_2} + \chi_{B_nB_2B_3} + \dots + \chi_{B_nB_{n-2}B_{n-1}},$$

т.е.

$$\chi_{B_1B_2 \dots B_n} = \chi_{B_nB_1B_2} + \chi_{B_nB_2B_3} + \dots + \chi_{B_nB_{n-2}B_{n-1}},$$

что и требовалось.

### Упражнения

6. Обобщите теоремы 1 и 2 на случай покрытия ориентированными многоугольниками.

7. Даны  $n$  точек общего положения  $A_1, \dots, A_n$  так, что  $A_1A_2 \dots A_m$  (для некоторого  $m \leq n$ ) – многоугольник. Семейство  $M$  трехэлементных подмножеств индексов  $\{i, j, k\}$  таково, что треугольники  $A_iA_jA_k$  образуют разбиение многоугольника  $A_1 \dots A_m$ . Аналогично,  $n$  точек общего положения  $B_1, \dots, B_n$  таковы, что  $B_1 \dots B_m$  – многоугольник. Докажите, что треугольники  $B_iB_jB_k$ ,  $\{i, j, k\} \in M$ , покрывают многоугольник  $B_1 \dots B_m$ .

*Указание.* Более сильное утверждение состоит в следующем: регулярные точки, лежащие внутри многоугольника  $B_1 \dots B_m$ , и только такие регулярные точки покрыты нечетным количеством треугольников вида  $B_iB_jB_k$ , где  $\{i, j, k\} \in M$ .

8. Для точек общего положения  $P, Q, A_1, \dots, A_t, B_1, \dots, B_s, C_1, \dots, C_r$  докажите следующее свойство *аддитивности*:

$$\chi_{PA_1A_2 \dots A_tQB_sB_{s-1} \dots B_1} + \chi_{PB_1B_2 \dots B_sQC_rC_{r-1} \dots C_1} + \chi_{PC_1C_2 \dots C_rQA_tA_{t-1} \dots A_1} = 0.$$

3) Определим площадь ориентированного треугольника как его площадь, взя-

тую со знаком «+» или «-» в зависимости от ориентации. Можно говорить об ориентированной площади  $S_T$  семейства  $T$  – это сумма ориентированных площадей всех входящих в  $T$  ориентированных треугольников. Для читателя, знакомого с интегрированием, приведем простую формулу  $S_T = \iint K_T(X) dx dy$  (здесь  $(x; y)$  – декартовы координаты точки  $X$ ), где интегрирование берется по плоскости. Любая из формул (2), (3) позволяет определить ориентированную площадь, ограниченную самопересекающейся замкнутой ломаной. Об ориентированных площадях в «Кванте» уже публиковались интересные статьи, которые мы рекомендуем читателю: А.Тоом. «Сколько площадей у многоугольника?» («Квант» №12 за 1984 г.), Н.Вагутен. «Формула площади» («Квант» №4 за 1981 г.).

**Упражнение 9.** Докажите, что наше определение ориентированной площади, ограни-

ченной самопересекающейся замкнутой ломаной, находится в согласии со следующим определением из статьи А.Тоома. Рассмотрим любую из частей, на которые ломаная делит плоскость. Пусть это часть плоскости  $\Pi_i$  и ее (обычная) площадь равна  $S_i$ . Пройдем ориентированный контур ломаной и вычислим количество  $n_i$  оборотов, которое мы обходим вокруг  $\Pi_i$  против часовой стрелки (возможно,  $n_i < 0$ , если мы в итоге сделали несколько оборотов по часовой стрелке). Тогда искомым ориентированной площадью назовем сумму величин  $n_i S_i$  по всем частям плоскости.

*Указание.* Можно воспользоваться формулой (3), выбрав удобное положение точки  $O$ .

4) В завершение заметим, что практически все, что было сказано, можно обобщить на пространство (и вообще, на пространство любой конечной размерности). Читатель может дать определение ориентации тетраэдра и его поверхности, а затем сформулировать и доказать пространственные обобщения теорем 1 и 2.

### Задачи помогают друг другу

В третьем номере журнала «Квант» за этот год рассказывалось о двух задачах, решать которые вместе проще, чем каждую в отдельности: вторая задача дает ключ к первой, и наоборот. Вот еще две такие задачи.

**Задача 1.** Играют в «Морской бой» на поле  $10 \times 10$ . Известно, что на поле как-то расположен один четырехпалубный корабль. Каково наименьшее количество выстрелов необходимо произвести, чтобы наверняка его задеть?

**Задача 2.** Какое наибольшее количество прямоугольников  $1 \times 4$  можно вырезать из квадрата  $10 \times 10$ ? (Разрезы проводятся по сторонам клеток.)

Ответ на первую задачу изображен на рисунке 1: достаточно произвести 24 выстрела (отмечены красными крестиками), чтобы наверняка

задеть четырехпалубник. Как, однако, доказать, что не хватит меньшего числа выстрелов?

То же происходит и со второй задачей: на рисунке 2 изображено, как вырезать 24 прямоугольника. Но почему не получится вырезать 25 (т.е. разрезать всю доску)?

По отдельности доказательства оптимальности требуют каких-то дополнительных соображений. Однако вместе они получаются практически «бесплатно»: достаточно наложить друг на друга рисунки 1 и 2. Получится рисунок 3, и на нем сразу видны оба доказательства. Действительно, если мы вырезали из квадратной доски несколько прямоугольников  $1 \times 4$ , то в каждом из них должен оказаться крестик – иначе мы бы не задели четырехпалубник. Крестиков 24 – значит, больше 24 прямоугольников вырезать не получится.

И наоборот: раз мы выделили на доске 24 непересекающихся места для четырехпалубного корабля, для каждого из них нужно хотя бы по одному выстрелу. Следовательно, выстрелов потребуется никак не меньше 24.

*Материал подготовил  
С.Кузнецов*

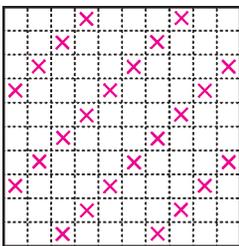


Рис. 1

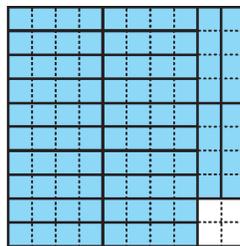


Рис. 2

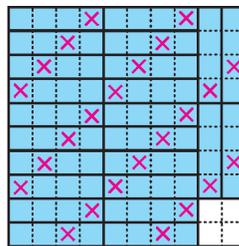


Рис. 3

## Задачи

1. Каждый день баран учит одинаковое количество языков. К вечеру своего дня рождения он знал 1000 языков. В первый день того же месяца он знал к вечеру 820 языков, а в последний день этого месяца — 1100 языков. Когда у барана день рождения?

*И.Раскина*



2. Трем мудрецам показали 9 карт: шестерку, семерку, восьмерку, девятку, десятку, валета, даму, короля и туза (карты перечислены по возрастанию их достоинства). После этого карты перемешали и каждому раздали по три карты. Каждый мудрец видит только свои карты. Первый сказал: «Моя старшая карта — валет». Тогда второй



Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на XVI Устной математической олимпиаде для 6–7 классов.

ответил: «Я знаю, какие карты у каждого из вас». У кого из мудрецов был туз?

*М.Евдокимов*

3. Цена стандартного обеда в таверне «Буратино» зависит только от дня недели. Аня обедала 10 дней подряд,



начиная с 10 июля, и заплатила 70 сольдо. Ваня также заплатил 70 сольдо, но за 12 обедов, начиная с 12 июля. Таня заплатила 100 сольдо за 20 обедов, начиная с 20 июля. Сколько заплатит Саня за 24 обеда, начиная с 24 июля?

*А.Шаповалов*

4. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить натуральные числа так, чтобы любые два числа, отличающиеся на 2 или в 2 раза, были покрашены в разные цвета?

*А.Пешнин*



# На том стоим!

**Л. АШКИНАЗИ**

— Вы знаете, Адам, новость — на каждого гражданина давит столб воздуха силою в двести четырнадцать кило!

— Нет, — сказал Козлевич, — а что?

— Как что! Это научно-медицинский факт. И мне это стало с недавнего времени тяжело. Вы только подумайте! Двести четырнадцать кило! Давят круглые сутки, в особенности по ночам.

Ильф и Петров. Золотой теленок

**Б**ЫВАЮТ ТАКИЕ ВОПРОСЫ, ЧТО ИХ ДАже задавать как-то странно. Например, почему реакция опоры  $N$  равна силе тяжести  $mg$ . Если человек посещал уроки физики и занимался на них физикой, а не общением в соцсетях, то он как минимум ответит — по третьему закону Ньютона. И ошибется, причем подобная ошибка, даже если само уравнение написано правильно, обойдется ему на ЕГЭ в один тестовый балл, т.е. в два, а может быть, даже и в три тех баллов, за которые он, собственно, борется. Ошибется потому, что третий закон говорит о силах, приложенных к разным телам, а  $N$  и  $mg$  приложены к одному телу. Более внимательный школьник ответит правильнее — по второму и третьему законам Ньютона, и даже проделает соответствующий вывод. Школьник, который еще более дотошен, сумеет получить соотношение между  $N$  и  $mg$ , если опора сама имеет ускорение  $a$ . Впрочем, и его можно запутать, спросив, что будет, если у опоры ускорение направлено вниз и по величине больше  $g$ .

Воспользовавшись его растерянностью, сообщим, что физика отличается от математики тем, что в ней ни одна задача не может быть решена до конца. Потому, что физика — одна из так называемых естественных наук, т.е. наука, непосредственно относящаяся к природе, рассматривающая процессы, происходящие или предположительно происходящие в природе. Кстати, математика тоже частично относится к природе, но опосредовано, через естественные науки. А реальные физические задачи могут быть решены только для некоторых условий и с некоторой точностью. Если же мы изначально

оговорим, какие законы считаем соблюдающимися, и договоримся пренебрегать всем остальным, иными словами, сведем физику к некоторой ограниченной модели, то тогда станут возможны точные и окончательные решения. Именно так мы всегда поступаем в школе с физикой и химией, создавая не вполне правильное представление об этих науках.

Обратимся к нашей конкретной задаче про  $N$  и про  $mg$ . Вот вопрос, который должен возникнуть: почему при выводе пресловутого равенства  $N = mg$  мы не учитываем давление воздуха  $p$ ? И не вздумайте что-то говорить про «мало» и «пренебрегаем» — сила, с которой воздух на земле, если не лезть в горы, давит на поверхность, составляет около 10 Н на каждый квадратный сантиметр, или около 2000 Н вертикально сверху на стоящего и 20000 Н на горизонтально лежащего человека. (Остап Бендер явно знал школьную физику.) Напомним, что 2000 и 20000 Н — это вес тела массой в 200 и 2000 кг соответственно. Получается, что, когда вы спите, на вас стоит примерно половина слона или два медведя — как вам больше нравится.

В школьном учебнике рассматривается вопрос о механических напряжениях в твердом теле, жидкости и газе, и в хорошем учебнике даже объяснено, почему напряжения в газе и жидкости называют давлением. Конечно, это надо было бы сделать яснее, обсудив применимость понятия «давление» для разных случаев, но сейчас речь не об этом, а о том, почему мы не учитываем силу Архимеда при выводе формулы  $N = mg$ . Ответ на вопрос известен: потому, что воздух примерно на три порядка легче воды, а металлов — примерно на четыре порядка. Тут еще можно вспомнить старую шутку про то, что тяжелее: килограмм гвоздей или килограмм ваты, и попросить дать численную оценку. Кстати, при попытке это сделать часто забывают, что «истинный объем» ваты — тот, который должен войти в силу Архимеда, — сильно отличается от геометрического, внешнего объема, от, так сказать, объема подушки. Упоминание закона Архимеда для тел, «мирно спящих», т.е. лежащих на столах, может — и должно было бы! — указать читателю на ключевой момент.

Однако наши приключения только начинаются. Прежде всего стоит спросить, глубока ли и широка ли щель – та, которая имеется под мирно спящем на столе телом. Это зависит от механических свойств и рельефа поверхности соприкасающихся тел. Когда мы кладем реальное шероховатое тело, то сначала оно касается другого тела одной точкой, потом, чуть повернувшись, второй, затем, еще чуть повернувшись, третьей, а еще чуть опускается, расширяя площади так называемого истинного контакта вокруг этих точек, причем итоговая суммарная площадь всех контактных площадок должна быть такой, чтобы материал выдерживал вес верхнего тела. Заметим, что при соприкосновении могли возникнуть еще контактные области, кроме первых трех. И что деформировались оба тела, причем распределение деформаций зависело от характеристик шероховатости и твердости обеих поверхностей.

Если мы кладем, например, стальной куб с ребром 10 см, масса которого примерно 8 кг, а вес 80 Н, на стальную поверхность, то площадь истинного контакта при прочности материала  $5 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup> составит, как легко посчитать, 0,16 мм<sup>2</sup>. Это ничтожно малая доля – 16 миллионных! – от геометрической площади контакта, которая составляет 10000 мм<sup>2</sup>. Ситуация, когда площадь истинного контакта составляет малую долю от геометрической, является для техники постоянной и вездесущей. И она влечет множество разных проблем. Так, если через контакт нужно передавать тепло или электрический ток, им приходится протискиваться через эти маленькие пятнышки. При передаче тепла это влечет увеличение перепада температур между деталями или, при фиксированном перепаде температур, уменьшение потока тепла. При протекании электрического тока маленькие контактные площадки из-за высокой плотности тока в них перегреваются, контакты могут свариваться, плавиться, даже испаряться. И это еще только начало проблем. Например, именно поведение контактов определяет сухое трение и химические процессы, идущие на контакте твердых тел.

Но сейчас нас интересует щель под телом, которое лежит на поверхности. Для твердых материалов она щель, как мы уже понимаем, занимает почти все пространство под

телом. Про мягкие тела поговорим чуть позже, а сейчас вопрос: как у этой щели дела с толщиной, пролезет ли туда молекула? Оптические поверхности имеют идеальную поверхность с точностью  $0,1 - 0,01 \lambda$ , т.е. от  $1/10$  до  $1/100$  длины волны видимого света – от 50 до 5 нм. Это чудовищно мало: если учесть, что при нормальном давлении расстояние между молекулами в газе порядка 3 нм, и привести в соприкосновение такие поверхности, то в щели по ширине смогут расположиться от 20 до 2 молекул. Однако этого вполне достаточно для давления – молекулы мечутся, как безумные, за секунду сталкиваясь со стенками от 6 до 60 миллиардов раз, и благополучно передают им импульс. Попутно заметим, что в некотором смысле (например, для движения вдоль щели) они ведут себя, как при «высоком вакууме» – сталкиваются в основном со стенками, а не друг с другом.

Кстати, когда в книгах заводят речь о диффузии в твердых телах, рассказ начинают с того, что исследователи сначала надолго прижимают свинец к золоту, а потом изучают, проникли ли атомы золота в свинец и наоборот. Но почему берут именно эти металлы? От каких свойств металлов зависит количество проникших атомов? В частности, от тех, от которых зависит площадь истинного контакта, площадь «пятнышек». А она тем больше, чем металл тяжелее, если он просто лежит, а не прижат дополнительной силой, и чем он мягче – мягкий металл прижимается плотнее, по большей площади.

А что произойдет, если одно из веществ настолько мягкое, что площадь истинного контакта оказывается сравнимой с геометрической? Тогда тела прижимаются друг к другу весьма большими силами атмосферного давления, и рассоединить их должно быть трудно. Почему же нам легко удастся отделить от стола прижатую к нему резинку? Ответ – потому, что она вся мягкая, при прижатии она деформируется вся, отчасти расплывается, и отделяем мы ее понемногу, плавно уменьшая геометрическую площадь контакта, а не всю сразу. Вот если бы мы сделали жесткую деталь с тонким мягким покрытием и прижали этим покрытием к жесткой поверхности, то отделить ее от этой поверхности стало бы труднее. Например, говорят, что подводную лодку может «при-

сосать» к дну. Это образное описание эффекта, возникающего при таких характеристиках грунта, что корпус плотно прилегает к нему, вода из щели вытесняется, а давление сверху остается (в воде на глубине 100 м это уже 10 атм).

Теперь мы перенесемся в далекое прошлое, в конец позапрошлого века. Жил да был в Швеции инженер Карл Эдвард Йохансон, и придумал он в 1896 году новый способ создания *эталонных размеров*. Странное словосочетание, правда? Дело в том, что для высокоточного измерения размеров очень полезно использовать какие-то эталоны, т.е. что-то, имеющее точно известный размер. Придумал он следующее – выпускать наборы пластинок очень точной длины, причем обработанных так, чтобы две пластинки, если их плотно прижать друг к другу и слегка сдвинуть одну по другой, «притереть», как принято говорить в технике, слипались. На фото на рисунке 1 показаны две плитки Йогансо-

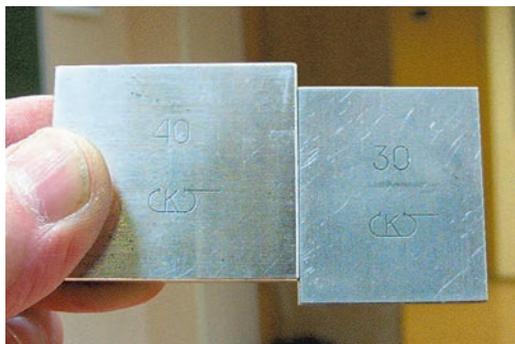


Рис. 1

на, в 30 и 40 мм, которые держит автор этой статьи.

О создателе этих плиток и истории создания вы легко найдете информацию в интернете. Просто спросите Гугла «плитки Йогансона», а лучше «gauge Johansson». Карл Эдвард прекрасно понимал, какую замечательную вещь он придумал, запатентовал и выпускал – посмотрите хотя бы на эмблему его фирмы, на которой внизу изображен земной шар (фото на рисунке 2). Делал он их, понятное дело, из стали. Ныне выпускают и стальные, и из карбида вольфрама, и из керамики. У всех материалов свои преимущества: стальные дешевле, карбид-вольфрамовые меньше истира-

ются при использовании, а у керамических меньше тепловое расширение.

Забавно, что за все эти годы как-то никто и не разобрался, почему эти плитки слипаются. В основном произносятся слова про ван-дер-ваальсовы силы и про поверхностное натяжение. Поверхностное натяжение может удерживать на воде водомерку и иголку, но не стограммовую железку на весу в воздухе, а для того чтобы «заработало» межмолекулярное притяжение (ван-дер-ваальсовы силы), поверхности должны сблизиться на межатомное расстояние, причем по всей площади. В зарубежных источниках, правда, упоминается атмосферное давление, но лишь как один из факторов, и не главный. Плитки Йогансона (их называют также «концевые меры») прижимают друг к другу именно атмосферное давление, а ничтожного количества влаги (и, возможно, масла), всегда имеющегося на поверхности, оказывается достаточно, чтобы не пустить в щель атмосферу. А если качество поверхностей немного хуже, на них приходится подышать – понятно зачем?

Но этим дело не кончается, это только первый слой задачи. Атмосферное давление на вертикальные поверхности действует горизонтально, а гравитация – как обычно, вертикально. Поэтому, чтобы удержать плитку от падения, нужно... сухое трение. Однако в упрощенной модели мира трение бывает только или сухое, или по жидкой смазке. Реальная ситуация может быть сложнее. Например, когда машина едет по мокрой мостовой, реализуется смешанное трение – вода успевает (хорошо, если успевает) выдавиться из зоны контакта (и долететь до прохожих). А когда мы «притираем» плитки, мы как раз и выдавливаем воду с некоторых участков, на которых реализуется непосредственный контакт плиток и то самое сухое трение. Поэтому вода, с одной стороны, не пускает атмосферу в щель, а с другой – не исключает сухого трения на некоторых участках.

Однако и это еще не все. Вода или иная жидкость, заполняющая зазор, контактиру-

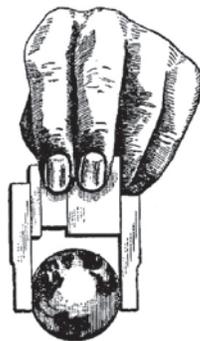


Рис. 2

ет с атмосферой, и в ней, казалось бы, все равно должно быть атмосферное давление. Например, в воде на глубине 10 м или в ртути на глубине 760 мм давление не 1 атм, а 2 атм – мы об этом иногда забываем, причем не когда ныряем, а, к сожалению, на экзамене. Но тут и приходит на помощь поверхностное натяжение, которое поднимает жидкость в капиллярах. Раз жидкость в капилляре оказывается выше исходного уровня – значит, давление в ней уменьшенное. Высота поднятия обратно пропорциональна величине зазора, и когда он уменьшается до единиц микрон, то давление в жидкости становится существенно меньше атмосферного. Вода в микрозазоре между плитками ведет себя, как в капилляре – тоже образует мениск, под которым понижено давление. Поэтому, кстати, плитки Иогансона будут слипаться и в вакууме! Ибо хотя атмосферного давления там нет, но есть отрицательное давление в жидкости.

Итак, чтобы происходило то, что вы видите на фото (см. рис.1), нужно соблюдение трех условий. Неплоскостность поверхностей должна быть не более единиц микрометров – чтобы не было больших зазоров, в которых вода, если и будет присутствовать, не сможет защитить плитки от атмосферного давления. Должно оказаться на поверхности потребное – ничтожное! – количество влаги и, возможно, масла (кстати, в реальной жизни протирка бензином вовсе не очищает поверхность полностью). Наконец, плитки должны быть отполированы так, чтобы при притирании образовалась зона непосредственного контакта. На ней, между прочим, могут позволить себе начать действовать и ван-дер-ваальсовы силы, хотя сила атмосферного давления и будет превосходить их на один-два порядка.

В самом начале этой статьи говорилось, что если мы при решении задач сразу оговорим, какие законы будем считать соблюдающимися, и будем пренебрегать всем остальным, то сможем получать точные и окончательные решения. Однако нам может попасться – в реальной работе или на экзамене – задача, которую не удастся решить в такой ограниченной модели. В реальной работе это совершенно нормальная ситуация, которая означает, что надо расширять модель. Получение же такой задачи на серьезном экзамене

(на ЕГЭ таких задач не может быть) означает, что экзаменатор хочет проверить именно нашу способность решать реальные задачи, расширять модели, т.е. заниматься настоящей наукой.

Вот два примера задач, связанных с реакцией опоры, которые можно решить, только «расширяя» модель.

*Первая задача:* пусть на поверхности лежит кубик и к его верхней точке приложена горизонтальная сила. Если все силы изображены так, как показано на рисунке 3, налицо противоречие – сумма сил ноль, но суммарный момент не равен нулю! Кубик обязан начать вращаться.

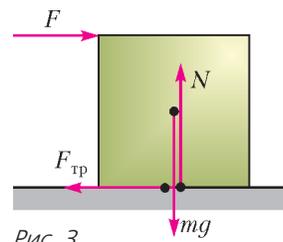


Рис. 3

Немного подумав, мы поймем, что с тремя из этих сил мы не можем сделать ничего такого, что повлияло бы на создаваемый ими момент. Единственное, что может нас спасти, это сдвиг реакции опоры вправо. А почему, собственно, мы всегда рисуем ее проходящей через центр тяжести?

Подсказка – представьте себе, что кубик лежит на мягкой поверхности. Что произойдет, если мы приложим к его верхней точке горизонтальную силу? Кубик промнет под собой поверхность, причем неравномерно – правый угол опустится ниже левого. Это означает, согласно закону Гука, что давление на опору станет распределено по плоскости неравномерно – на правом конце оно будет больше, чем на левом (рис.4). Суммарная сила реакции опоры окажется сдвинутой вправо, что и требуется для поддержания отсутствия вращения. Заметим, что мы сейчас слегка вышли за обычный курс и, по существу, прибегли к понятию распределенной силы.

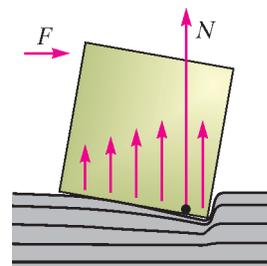


Рис. 4

На самом деле для тел, имеющих размеры (не для материальных точек), многие силы являются распределенными, например трение, реакция опоры, гравитация.

*Вторая задача:* по горизонтальной поверхности катится шарик. Он понемногу тормозится и в итоге, как ему и положено, останавливается. Как была направлена сила трения, которую называют «сила трения качения»? Если назад (рис.5,а), то шарик будет тормозиться, но – раскручиваться, поскольку момент этой силы ускоряет вращение. Если вперед (рис.5,б), то вращение будет тормозиться, но скорость центра тя-

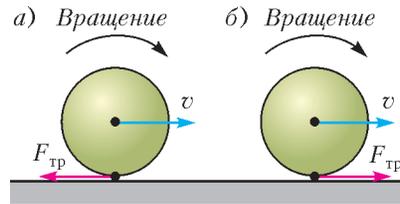


Рис. 5

жести будет расти. И то, и то – очевидная глупость.

Что мы знаем про суммарную силу, с которой поверхность действует на шарик? Ее вертикальная компонента должна быть равна силе тяжести, горизонтальная – направлена назад по ходу, а ее момент должен тормозить вращение. Мы вынуждены нарисовать эту силу так, как показано на рисунке 6, и сделать вывод, что для торможения катящегося шарика плоскость должна быть деформируема. На бесконечно жесткой плоскости бесконечно жесткий шарик будет катиться вечно, ну, до сжатия Вселенной, если оно когда-то произойдет...

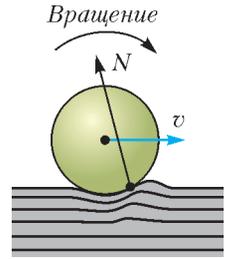


Рис. 6

## НАМ ПИШУТ

### Незадача с задачей

В третьем номере «Кванта» за 2008 год приводится решение задачи Ф2078 из «Задачника Кванта». Вот ее условие:

«Из листа фанеры вырезали кусок в форме прямоугольного треугольника с катетами 60 см и 80 см, масса этого куска равна 2 кг. Кусок фанеры подвесили к потолку при помощи двух одинаковых легких нитей, расстояние между точками прикрепления нитей к потолку равно 100 см (рис.1). Найдите силы натяжения нитей».

Идущее вслед за условием решение вызывает, мягко говоря, недоумение. Приведем его полностью, благо оно довольно короткое:

«Тут достаточно сообразить – где находится центр тяжести фигуры. Известно, что для такого треугольника (вырезанного из листа постоянной толщины) он оказывается в точке пересечения медиан. Медианы в точке пересечения делятся в отношении 2:1, значит, эта точка по горизонтали находится вдвое ближе к правой точке подвеса, чем к левой, тогда и сила натяжения правой нити вдвое больше, чем у левой. В сумме эти силы составляют  $Mg$ ,

поэтому

$$T_1 = \frac{Mg}{3} = \frac{2 \cdot 9,8}{3} \text{ Н} = 6,5 \text{ Н}$$

$$\text{и } T_2 = \frac{2Mg}{3} = 13 \text{ Н} \text{.}$$

Наиболее удивительно выглядит фраза: «...значит, эта точка по горизонтали находится вдвое ближе к правой точке подвеса, чем к левой...» А чем, собственно, правая точка подвеса лучше левой? Медиану можно провести и из правой вершины треугольника, и тогда, если рассуждать теми же словами, центр тяжести окажется уже вдвое ближе к *левой* точке подвеса, чем к *правой*.

Ошибка приведенного решения в том, что точка пересечения медиан действительно делит в отношении 2 : 1 – но не расстояние между точками подвеса, а *каждую медиану*. И потому, чтобы правильно решить задачу, давайте в нашем треугольнике ABC (рис.2) проведем медиану AM и отметим на ней точку O пересечения медиан, которая делит саму эту медиану в отношении  $AO : OM = 2 : 1$  (т.е.  $AO = \frac{2}{3} AM$ ). Кроме того, опустим перпенди-

Рис. 1

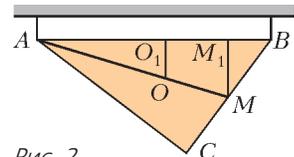
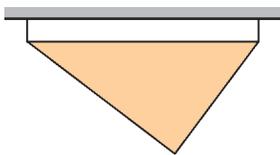


Рис. 2

куляры  $MM_1$  и  $OO_1$  из точек  $M$  и  $O$  на гипотенузу  $AB$ .

А теперь посчитаем. Поскольку  $AM$  – медиана, то  $BM = \frac{BC}{2} = \frac{60 \text{ см}}{2} = 30 \text{ см}$ . Треугольники  $ABC$  и  $MBM_1$ , очевидно, подобны, следовательно,  $\frac{BM_1}{BM} = \frac{BC}{AB}$ , и тогда  $BM_1 = BM \cdot \frac{BC}{AB} = 30 \cdot \frac{60}{100} \text{ см} = 18 \text{ см}$ . Значит,  $AM_1 = AB - BM_1 = 82 \text{ см}$ . Так как

$AO = \frac{2}{3}AM$ , то, используя подобные треугольники  $AMM_1$  и  $AOO_1$ , находим  $AO_1 = \frac{2}{3}AM_1 = 54,7 \text{ см}$  и  $BO_1 = AB - AO_1 = 45,3 \text{ см}$ . Теперь уже без труда определяем силы натяжения нитей в точках  $A$  и  $B$ :

$$T_A = Mg \cdot \frac{BO_1}{AB} = 8,9 \text{ Н}$$

$$\text{и } T_B = Mg \cdot \frac{AO_1}{AB} = 10,7 \text{ Н}.$$

И.Акулич

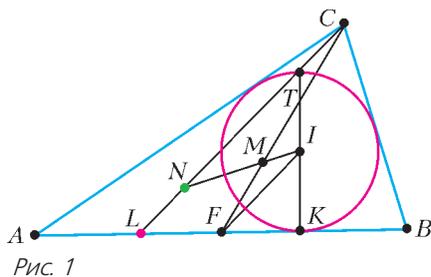
### Дополнение к приключению одной задачи

В статье А.Заславского «Приключения одной задачи» («Квант» №12 за 2017 г.) рассматривались треугольники, в которых утроенная длина одной стороны равна сумме длин двух других сторон. Пусть дан такой треугольник  $ABC$ , в котором  $AC + BC = 3AB$ . Пусть  $P$  – середина стороны  $AC$  и  $Q$  – середина стороны  $BC$ . В статье было указано несколько условий, эквивалентных равенству  $AC + BC = 3AB$ . Одно из этих условий – касание средней линии  $PQ$  и вписанной в треугольник окружности. Оказывается, в таком случае точка касания средней линии с вписанной окружностью совпадает с точкой Нагеля треугольника  $ABC$ . (Напомним, что точка Нагеля – это точка пересечения отрезков, соединяющих вершины с точками касания противоположных сторон с соответствующими внеписанными окружностями.)

Для доказательства этого факта используем следующую задачу.

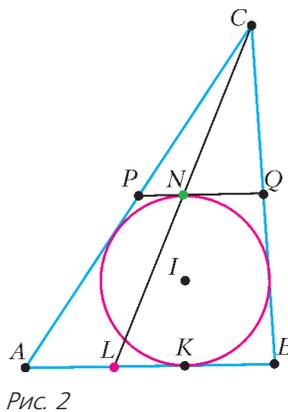
**Задача** (А.Мякишев, Олимпиада имени И.Ф.Шарыгина). *Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается стороны  $AB$  в точке  $K$ , а внеписанная окружность, соответствующая углу  $C$ , касается стороны  $AB$  в точке  $L$ . Точка  $N$  – точка Нагеля треугольника  $ABC$ , точка  $T$  – точка пересечения отрезка  $CL$  с вписанной окружностью, ближайшая к  $C$ . Докажите, что  $LN = CT$ .*

**Решение.** Пусть  $I$  – центр вписанной окружности,  $M$  – точка пересечения медиан, а  $F$  – середина стороны  $AB$  (рис.1). Так как  $L$  и  $T$  – соответствующие точки при гомотетии с центром в  $C$ , переводящей внеписанную окружность во вписанную, то точки  $C, T, L$  лежат на одной прямой. Как известно,  $LF = FK$ . А так как  $TI = IK$ , то  $FI$  – средняя линия в треугольнике  $LTK$ . Отсюда  $LT = 2FI$ . Известно, что точки  $N, M, I$  лежат на одной прямой (прямая



Нагеля), причем  $NM = 2MI$ . Точка  $M$  делит медиану в отношении 2:1 считая от вершины. Поэтому треугольники  $NCM$  и  $FMI$  подобны с коэффициентом 2. Отсюда  $NC = 2FI$ . Получили, что  $LT = NC$ , а это означает, что  $LN = CT$ . Задача решена.

Вернемся к нашему факту. Теперь доказать его очень просто. Используем те же обозначения, что и раньше (рис.2). Ясно, что средняя линия  $PQ$  касается вписанной окружности тогда и только тогда, когда точка  $T$  лежит на



$PQ$ , т.е. когда  $LT = TC$ . Но, согласно нашей задаче, это эквивалентно равенству  $LN = NC$ , т.е. совпадению точек  $N$  и  $T$ .

С.Арутюнян

# Законы механики и параметры эллипса

В. ГРЕБЕНЬ

СОГЛАСНО ПЕРВОМУ ЗАКОНУ КЕПЛЕРА, планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых (общем для всех планет) находится Солнце. Поэтому большой интерес представляют свойства эллипса, которые можно установить, используя законы сохранения энергии и момента импульса, а также законы Кеплера. Вначале мы докажем равенство механических энергий движения по эллипсу и окружности в случае равенства большой полуоси эллипса радиусу окружности. Далее найдем радиусы кривизны в точках пересечения эллипса с его осями симметрии и затем получим формулу площади эллипса.

Эллипсом называется множество точек плоскости  $K(x; y)$ , для которых сумма расстояний до двух данных точек – фокусов  $F_1$  и  $F_2$  – есть величина постоянная:  $r_1 + r_2 = 2a$ . На рисунке 1 точка  $O$  – центр симметрии

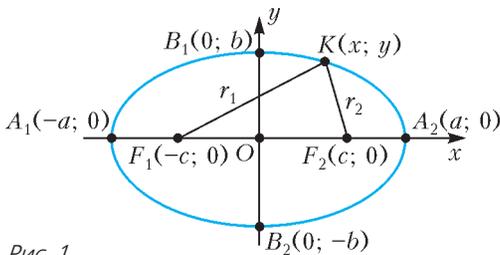


Рис. 1

эллипса, т.е. точка пересечения его осей симметрии,  $A_1A_2$  – длина большой оси эллипса,  $A_1O = OA_2 = a$  – длина большой полуоси,  $B_1B_2$  – длина малой оси,  $B_1O = OB_2 = b$  – длина малой полуоси эллипса,  $F_1O = OF_2 = c$  – удаление фокусов эллипса от его центра симметрии. Используя теорему Пифагора, можно установить связь

между  $a$ ,  $b$  и  $c$ :

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

**Равенство энергий.** Рассмотрим планету массой  $m$ , движущуюся по эллиптической орбите вокруг Солнца массой  $M$ , где  $M \gg m$ , находящегося, например, в фокусе  $F_1$ . Пусть скорости планеты будут  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$  в перигелии, афелии и вершине  $B_1$  соответственно (рис. 2). Момент импульса планеты

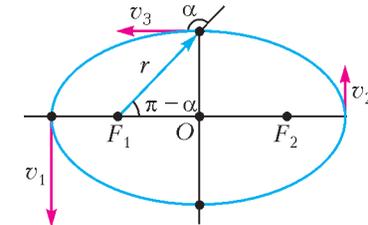


Рис. 2

в произвольной точке его орбиты равен векторному произведению его радиуса-вектора  $\vec{r}$  и импульса  $m\vec{v}$ :

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Модуль момента импульса равен

$$L = mvr \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$ . Согласно закону сохранения момента импульса, момент импульса замкнутой системы сохраняется. В нашем случае это можно записать так:

$$mv_1(a - c) = mv_2(a + c) = mv_3b.$$

Здесь мы учли, что

$$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha) = \frac{b}{r}.$$

Тогда

$$v_1 = \frac{v_3 b}{a - c}, \quad v_2 = \frac{v_3 b}{a + c} \quad \text{и}$$

$$v_1^2 - v_2^2 = v_3^2 b^2 \left( \frac{1}{(a - c)^2} - \frac{1}{(a + c)^2} \right) = v_3^2 \frac{4ac}{b^2}. \quad (1)$$

По закону сохранения энергии имеем

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{GMm}{a - c} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GMm}{a + c},$$

откуда

$$v_1^2 - v_2^2 = \frac{4GMc}{b^2}. \quad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), получаем

$$v_3^2 = \frac{GM}{a}. \quad (3)$$

Полная механическая энергия движущейся по эллипсу планеты, с учетом (3), будет равна

$$W_{\Pi} = \frac{mv_3^2}{2} - \frac{GMm}{a} = \frac{GMm}{2a} - \frac{GMm}{a} = -\frac{GMm}{2a}. \quad (4)$$

Теперь найдем полную механическую энергию планеты, вращающейся по окружности радиусом  $a$ . По второму закону Ньютона,

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{GMm}{a^2}, \text{ откуда } v^2 = \frac{GM}{a}.$$

Далее,

$$W_0 = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{a} = -\frac{GMm}{2a}. \quad (5)$$

Как видно из (4) и (5), механические энергии движения по эллипсу и по окружности равны в случае равенства большой полуоси эллипса и радиуса окружности. По третьему закону Кеплера, равны и соответствующие периоды обращения.

**Радиусы кривизны.** Для нахождения радиусов кривизны в вершинах эллипса применим второй закон Ньютона и закон всемирного тяготения. Обозначим радиус кривизны в перигелии  $R_p$ . Тогда

$$\frac{mv_1^2}{R_p} = \frac{GMm}{(a-c)^2}.$$

Воспользуемся ранее полученным соотношением  $v_1 = v_3 \frac{b}{a-c}$  и выразим радиус кривизны в перигелии:

$$R_p = \frac{v_1^2 (a-c)^2}{GM} = \frac{v_3^2 b^2 (a-c)^2}{(a-c)^2 GM} = \frac{b^2}{a}.$$

Очевидно, что в афелии будет такой же радиус кривизны:

$$R_a = R_p = \frac{b^2}{a}.$$

Аналогично можно получить выражение для радиуса кривизны эллипса  $R_b$  в точке  $B_1$ :

$$\frac{mv_3^2}{R_b} = \frac{GMm}{a^2} \frac{b}{a}, \quad R_b = \frac{a^3}{b} \frac{v_3^2}{GM} = \frac{a^2}{b}.$$

Как видно,  $R_b > R_p$ .

**Площадь эллипса.** Второй закон Кеплера гласит: радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади. Применим этот закон для случая прохождения планетой перигелия. Пусть площадь эллипса равна  $S$ , период обращения планеты по орбите равен  $T$ . За очень малый промежуток времени  $\Delta t$  радиус-вектор планеты опишет площадь  $\Delta S = \frac{S}{T} \Delta t$ . С другой стороны, эту площадь можно считать площадью треугольника. За время  $\Delta t$  планета пройдет очень короткую дугу эллипса длиной  $P_1P_2 = v_1 \Delta t$  (рис.3). Ее мож-

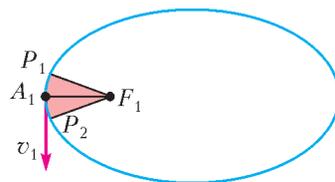


Рис. 3

но считать, с небольшой погрешностью, отрезком прямой, а именно основанием треугольника, высотой которого является расстояние от перигелия до фокуса  $A_1F_1 = a - c$ .

Тогда  $\Delta S = \frac{1}{2} v_1 \Delta t (a - c)$ . Это дает нам право записать равенство

$$\frac{S}{T} \Delta t = \frac{1}{2} v_1 \Delta t (a - c),$$

из которого следует

$$S = \frac{T}{2} v_1 (a - c).$$

Период  $T$  обращения планеты найдем для случая вращения по окружности радиусом  $a$ , равным большой полуоси эллипса:

$$T = \frac{2\pi a}{v}, \quad \frac{mv^2}{a} = \frac{GMm}{a^2}, \quad v^2 = \frac{GM}{a},$$

$$T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{GM}}.$$

Скорость в перигелии равна

$$v_1 = v_3 \frac{b}{a-c} = \frac{b}{a-c} \sqrt{\frac{GM}{a}}.$$

Отсюда получаем

$$S = \pi a \sqrt{\frac{a}{GM}} \frac{b}{a-c} \sqrt{\frac{GM}{a}} (a-c) = \pi ab.$$

# Теорема об изогоналях

А. КУЛИКОВА, Д. ПРОКОПЕНКО

## Доказательство основных фактов

Для доказательства основной теоремы нам понадобится следующая лемма.

**Лемма (свойство и признак изогоналей).**

**Свойство.** Пусть  $OP$  и  $OQ$  – изогонали угла  $MON$ ,  $x_P$  и  $y_P$  ( $x_Q$  и  $y_Q$ ) – расстояния от точки  $P$  ( $Q$ ) до прямых  $OM$  и  $ON$

соответственно (рис. 12). Тогда

$$\frac{x_P}{y_P} = \frac{y_Q}{x_Q}.$$

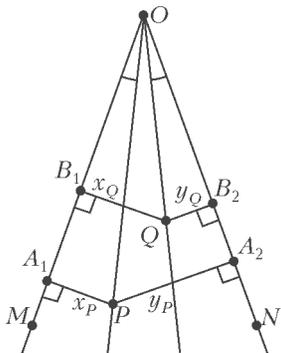


Рис. 12

**Признак.** Пусть  $x_P$  и  $y_P$  ( $x_Q$  и  $y_Q$ ) – расстояния от точки  $P$  ( $Q$ ) до прямых  $OM$  и  $ON$  соответственно и  $\frac{x_P}{y_P} = \frac{y_Q}{x_Q}$ . Тогда  $OP$  и  $OQ$  – изогонали угла  $MON$ .

**Доказательство свойства.** Пусть  $A_1$  и  $A_2$  – проекции точки  $P$  на прямые  $OM$  и  $ON$  соответственно (см. рис. 12). Аналогично определим  $B_1$  и  $B_2$  – проекции точки  $Q$ .

Из подобных треугольников  $OPA_1$  и  $OQB_2$  следует

$$\frac{x_P}{y_Q} = \frac{OP}{OQ}. \quad (1)$$

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

Аналогично из треугольников  $OQB_1$  и  $OPA_2$  найдем

$$\frac{x_Q}{y_P} = \frac{OQ}{OP}. \quad (2)$$

Перемножим (1) и (2) и получим  $\frac{x_P}{y_Q} \cdot \frac{x_Q}{y_P} = 1$ .

Следовательно,  $\frac{x_P}{y_P} = \frac{y_Q}{x_Q}$ . Свойство изогоналей доказано.

**Упражнение 9.** Докажите признак.

*Указание.* Воспользуйтесь подобием треугольников  $A_1PA_2$  и  $B_1QB_2$ .

Перейдем к доказательству основной теоремы.

**Теорема об изогоналях.** Пусть  $OB$  и  $OC$  – изогонали угла  $AOD$  (рис. 13, а). Прямые  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $Q$ , прямые  $AB$  и  $CD$  – в точке  $P$ . Тогда  $OP$  и  $OQ$  – также изогонали относительно угла  $AOD$ .

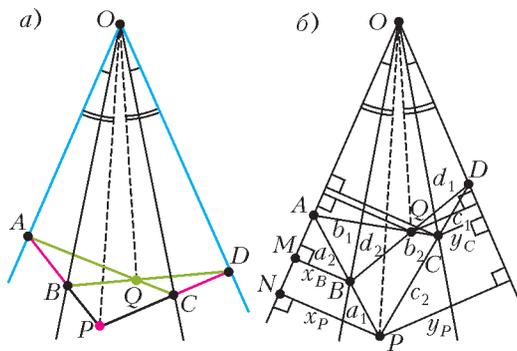


Рис. 13

**Доказательство.** Пусть  $x_P$  и  $y_P$  – расстояния от точки  $P$  до прямых  $OA$  и  $OD$  соответственно. Аналогично будем обозначать расстояния от точек  $Q$ ,  $B$  и  $C$ .

Обозначим также для краткости длины сторон выпуклого четырехугольника  $PBQC$  так:  $PB = a_1$ ,  $BQ = d_2$ ,  $QC = b_2$ ,  $CP = c_2$ ; отрезки  $BA = a_2$ ,  $AQ = b_1$ ,  $QD = d_1$ ,  $DC = c_1$  (рис. 13, б).

Условие, что  $OB$  и  $OC$  – изогонали, по лемме равносильно равенству

$$\frac{x_P}{y_P} = \frac{y_Q}{x_Q}, \quad (3)$$

или

$$\frac{x_P x_Q}{y_P y_Q} = 1.$$

Будем доказывать это равенство.

Для точек  $B$  и  $P$  из подобных прямоугольных треугольников  $APN$  и  $ABM$  получим равенство

$$\frac{x_P}{x_B} = \frac{a_1 + a_2}{a_2}. \quad (4)$$

Далее аналогично для пар точек  $P$  и  $C$ ,  $B$  и  $Q$ ,  $Q$  и  $C$  получим соответственно

$$\frac{y_C}{y_P} = \frac{c_1}{c_1 + c_2}, \quad (5)$$

$$\frac{y_Q}{y_B} = \frac{d_1}{d_1 + d_2}, \quad (6)$$

$$\frac{x_C}{x_Q} = \frac{b_1 + b_2}{b_1}. \quad (7)$$

Из равенств (4)–(7) найдем выражение  $M = \frac{x_P x_Q}{y_P y_Q}$  и докажем, что  $M = 1$ , а это равносильно (3).

Действительно,

$$M = \frac{x_B x_C}{y_B y_C} \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_2} \cdot \frac{c_1}{c_1 + c_2} = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot \frac{b_1 + b_2}{b_1} = \frac{(a_1 + a_2)(d_1 + d_2)b_1 c_1}{d_1 a_2 (c_1 + c_2)(b_1 + b_2)}. \quad (8)$$

Точки  $B$  и  $C$  лежат на изогоналях, поэтому по лемме

$$\frac{x_B x_C}{y_B y_C} = 1.$$

По теореме Менелая для треугольника  $APC$  и прямой  $BD$

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_1 + c_2} = 1.$$

Аналогично для треугольника  $ABQ$  и прямой  $PD$

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1} \cdot \frac{d_1 + d_2}{d_1} \cdot \frac{b_2}{b_1 + b_2} = 1.$$

Перемножим почленно два последних равенства и получим равенство (8). Следовательно,  $M = 1$ , а по лемме это равносильно тому, что  $OP$  и  $OQ$  – изогонали.

Теорема доказана.

Интересно, а что будет, если в условиях теоремы прямые  $AB$  и  $CD$  не пересекаются? Ответ дает такой вариант теоремы об изогоналях.

**Обобщение теоремы об изогоналях** (включая случай параллельных прямых). Пусть

$OB$  и  $OC$  – изогонали угла  $AOD$ . Прямые  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $Q$ .

1) Пусть  $AB$  пересекает  $CD$  в точке  $P$ .

2) Если  $AB \parallel CD$ , то рассмотрим луч  $OP$ , параллельный  $AB$  (рис. 14).

Тогда  $OP$  и  $OQ$  – также изогонали относительно угла  $AOD$ .

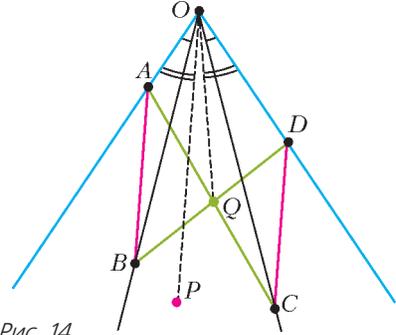


Рис. 14

**Доказательство.** Пункт первый мы уже доказали, рассмотрим теперь второй случай, когда  $AB \parallel CD$ . Пусть  $OP_1$  и  $OQ$  – изогонали. Предположим, что прямая  $OP_1$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $P'$ . Тогда по пункту 1 нашей теоремы  $P'$  лежит на  $CD$ , т.е.  $AB$  пересекает  $CD$  в точке  $P'$ , что противоречит условию  $AB \parallel CD$ . Следовательно,  $OP_1 \parallel AB \parallel CD$ , т.е. изогональ к  $OQ$  совпала с  $OP$ .

**Случай параллельных прямых**

Теперь мы можем рассмотреть применение теоремы об изогоналях, когда прямые  $AB$  и  $CD$  в условиях теоремы не пересекаются.

**Задача 10.** Пусть  $BA_1$  и  $BC_1$  – внешние биссектрисы угла  $B$  треугольника  $ABC$ ,  $\angle AA_1B = \angle CC_1B = 90^\circ$  (рис. 15). Докажите, что  $A_1C$  и  $C_1A$  пересекаются на биссектрисе угла  $ABC$ .

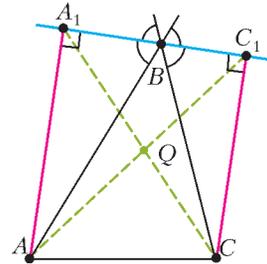


Рис. 15

**Решение.** Заметим, что углы  $A_1BA$  и  $C_1BC$  равны. Тогда  $BA$  и  $BC$  – изогонали развернутого угла  $A_1BC_1$ . Пусть  $A_1C$  пере-

секает  $AC_1$  в точке  $Q$ . Поскольку  $A_1A \parallel C_1C$ , то по теореме об изогоналях вторая изогональ к  $BQ$  должна быть параллельна  $A_1A$ . Но биссектриса угла  $ABC$  перпендикулярна внешним биссектрисам, поэтому она параллельна прямым  $A_1A$  и  $C_1C$  и является второй изогональю к  $BQ$ . Тогда изогональ  $BQ$  тоже должна совпасть с биссектрисой угла  $ABC$ , т.е. точка  $Q$  лежит на биссектрисе угла  $ABC$ .

Следующая задача предлагалась на Международную олимпиаду 2007 года (ShortList), но не вошла в основной список.

**Задача 11.** Диагонали трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$  (рис. 16). Точка  $Q$

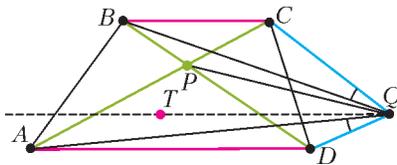


Рис. 16

лежит между параллельными прямыми  $BC$  и  $AD$  так, что  $\angle A Q D = \angle C Q B$  и прямая  $CD$  разделяет точки  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $\angle B Q P = \angle D A Q$ .

**Решение.** По теореме об изогоналях для угла  $CQD$ , изогональ  $QT$  к лучу  $QP$  должна быть параллельна  $AD$ . Но тогда  $\angle BQP = \angle AQT = \angle DAQ$ , что и требовалось доказать.

Следующая задача была в 2011/12 учебном году на региональном этапе Всероссийской олимпиады в 10 классе под №8, т.е. считалась самой сложной.

**Задача 12.** В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $CD$  перпендикулярна основаниям,  $O$  – точка пересечения диагоналей (рис. 17,а). На описанной окружности треугольника  $OCD$  взята точка  $S$ , диаметрально противоположная точке  $O$ . Докажите, что  $\angle BSC = \angle ASD$ .

**Решение.** Предположим, что углы  $BSC$  и  $ASD$  не равны. Рассмотрим точку  $E$  на стороне  $AD$  такую, что  $\angle BSC = \angle ESD$  (рис. 17,б). Пусть  $AD$  пересекает  $CE$  в точке  $O_1$ . Тогда, по теореме об изогоналях,  $SO_1$  и  $SH$  – изогонали. Вспомним, что высота  $SH$  и диаметр  $SO$  описанной окружности треугольника  $CSD$  – тоже изогонали угла  $CSD$ . Следовательно, точка  $O_1$  совпадает с точкой  $O$ , точка  $E$  совпадает с  $A$ , и  $\angle BSC = \angle ASD$ .

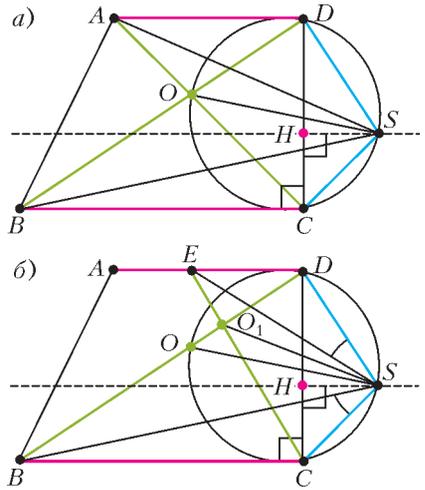


Рис. 17

**Добавление**

Приведем еще одно обобщение основной теоремы – из книги А.В.Акопяна, А.А.Заславского «Геометрические свойства кривых второго порядка» [6].

**Теорема.** Пусть в треугольнике  $ABC$  даны две пары изогонально сопряженных точек  $X, X'$  и  $Y, Y'$  (рис.18). Тогда точки

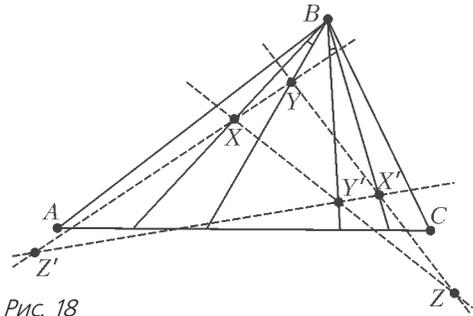


Рис. 18

пересечения  $XY$  с  $X'Y'$  и  $XY'$  с  $X'Y$  тоже изогонально сопряжены.

**Доказательство.** Рассмотрим угол  $XBX'$ ,  $Y$  и  $Y'$  – точки на изогоналях угла  $XBX'$  ( $\angle ABX = \angle CBX'$  и  $\angle ABY = \angle CBY'$ , следовательно,  $BY$  и  $BY'$  – изогонали в  $\angle XBX'$ ), а  $X$  и  $X'$  – точки на сторонах угла  $XBX'$ . Точки  $Z$  и  $Z'$  – пересечение прямых  $X'Y$  и  $Y'X$ ,  $Y'X'$  и  $XY$ . По теореме об изогоналях,  $BZ$  и  $BZ'$  – изогонали угла  $XBX'$ , а также и угла  $ABC$ . Аналогично,  $AZ$ ,  $AZ'$  и  $CZ$ ,  $CZ'$  – изогонали в углах  $BAC$  и  $BCA$  соответственно. Следовательно, точки  $Z$  и  $Z'$  изогонально сопряжены.

Существуют и другие идеи доказательства основной теоремы. Например, в докладе А.Куликовой на ММКШ [1] использовались двойные отношения точек и свойства центрального проектирования, что позволило сильно сократить доказательство.

И.Фролов сообщил нам, что после полярного преобразования с центром  $O$  теорема об изогоналях превращается в следующий факт:

*Пусть в четырехугольнике  $KLMN$  биссектрисы углов между парами прямых  $KL$  и  $MN$ ,  $KM$  и  $LN$  параллельны (это условие эквивалентно вписанности четырехугольника). Тогда им параллельна и биссектриса угла между прямыми  $KN$  и  $ML$ .*

От П.Кожевникова мы узнали, что при подходящей центральной проекции в пространстве точка  $O$  уйдет на бесконечность, а пары прямых  $OA$  и  $OD$ ,  $OB$  и  $OC$ ,  $OP$  и  $OQ$  (рис.19) станут параллельными прямыми, симметричными относительно фиксированной прямой (прямой Гаусса), которая проходит через середины отрезков  $AD$ ,  $BC$ ,  $PQ$ .

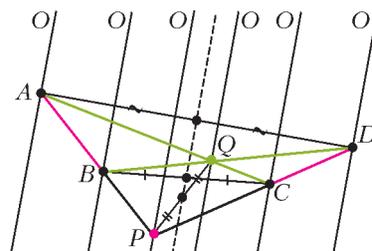


Рис. 19

**Список литературы**

1. Московская математическая конференция школьников (ММКШ). (<https://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/notes.htm>)
2. П.Кожевников. Изогонально сопряженные точки. – «Квант», 2016, №1.
3. Д.Прокопенко. Изогональное сопряжение и педальные треугольники. – «Квант», 2017, №9.
4. Сайт Олимпиады по геометрии имени И.Ф.Шарьгина: [geometry.ru](http://geometry.ru).
5. А.В.Акопян. Геометрия в картинках. – М., 2017.
6. А.В.Акопян, А.А.Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. – М.: МЦНМО, 2007.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

# Маятник Капицы

**С.ДВОРЯНИНОВ**

*Удивление – мать познания.*

Приписывается Аристотелю

СЕЙЧАС МЫ РАССКАЖЕМ ОБ ОДНОМ ИНТЕРЕСНОМ ФИЗИЧЕСКОМ ЯВЛЕНИИ. Более того – оно удивительно, и на этом основании попало в книгу В.И.Арнольда «Математическое понимание природы. Очерки удивительных физических явлений и их понимание математиками (с рисунками автора)». Речь пойдет о маятнике.

Обычно маятник рисуют так, как показано на рисунке 1. На длинной нити подвешено

небольшое тело, которое совершает колебания. Такой маятник называют математическим. Нижнее положение равновесия маятника устойчиво. Вместо нити можно взять стержень – у нас будет именно такой маятник.

А теперь перевернем маятник, заставим его стоять, как пишет Арнольд, «вверх ногами» (рис.2). У такого маятника прежняя точка подвеса превращается в точку опоры, но мы по традиции будем называть ее точкой подвеса. Хорошо известно, что поставить такой маятник вертикально не удастся – или влево, или вправо он обязательно упадет. Если все же получится зафиксировать его в вертикальном положении, то малейшее сотрясе-



Рис. 1

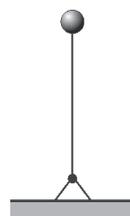


Рис. 2

ние опоры или дуновение воздуха приведет к опрокидыванию маятника. Это есть следствие и проявление неустойчивости верхнего положения равновесия перевернутого маятника.

Академик и будущий нобелевский лауреат Петр Леонидович Капица (в 2019 году исполнится 125 со дня его рождения) проделал такой эксперимент. Он заставил точку подвеса совершать быстрые колебания вдоль вертикали. Что могло быть источником таких колебаний? Время было послевоенное, небогатое, но в семье Капицы была электрическая швейная машинка, стало быть, имелся электромотор. Точка подвеса должна совершать поступательное движение вверх-вниз, а электромотор создает вращательное движение. Как одно превратить в другое – давно и хорошо известно. Например, у паровоза поступательное движение поршня в цилиндре кривошипно-шатунным механизмом преобразуется во вращение колес.

Схема конструкции маятника Капицы изображена на рисунке 3. На оси электромотора

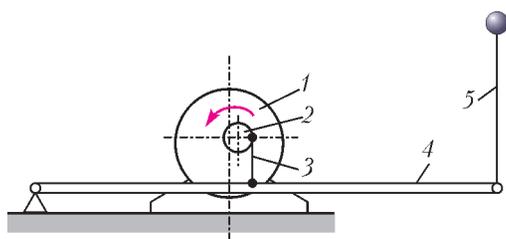


Рис. 3

1 эксцентрично насажен шариковый подшипник 2, к его ободу присоединена тяга 3, которая приводит в колебание рычаг 4. Один конец рычага вращается относительно неподвижной оси, а на другом подвешивается стержень маятника 5 так, что он может свободно качаться. Маятник с вибрирующей точкой подвеса устойчиво стоял вверх ногами. Попытка отклонить его в сторону приводила к тому, что он начинал качаться около вертикали влево-вправо, но не падал.

Задача рассмотрения такого маятника возникла в связи с теорией ускорителей. При разработке нового проекта требовалось определить, будет ли движение ускоряемой частицы по кольцу огромного диаметра устойчивым. Оказалось, что круговое движение частицы в ускорителе описывается тем же дифференциальным уравнением, кото-

рое соответствует движению перевернутого маятника. П.Л.Капица предложил экспериментально проверить устойчивость, рассмотрев конструкцию с перевернутым маятником. Ясно, что эксперимент с маятником стоит во много-много раз дешевле, чем строительство ускорителя.

Запись рассказа В.И.Арнольда об этом маятнике вы можете посмотреть на сайте «Математические этюды» (<http://etudes.ru>). У него не было электрической швейной машинки, и поэтому в качестве источника вертикальных колебаний маятника Владимир Игоревич использовал электробритву вибрационного типа «Нева». Маятник крепился к язычку электробритвы с помощью цангового зажима для карандаша.

Хорошо известно, что лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать. А еще лучше подержать в руках. Удивительно, но убедиться на опыте в принципиальной возможности стабильности перевернутого маятника при соответствующей вибрации точки подвеса вы можете почти мгновенно, не вставая из-за своего письменного стола. Все необходимое для проведения эксперимента у вас есть под рукой.

Возьмите деревянную (или пластмассовую) линейку с дыркой на конце и положите ее на гладкий полированный стол. В дырку поместите незаточенный карандаш и быстро-быстро, словно скрипач смычком, перемещайте карандаш туда-сюда по направлению, не совпадающим с направлением линейки (рис.4). Вы сразу увидите, как линейка

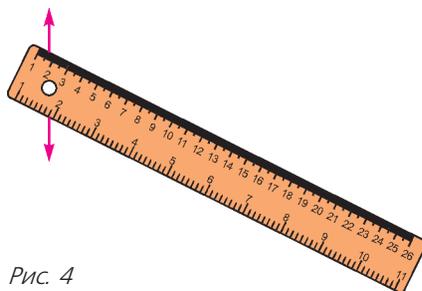


Рис. 4

начнет поворачиваться и расположится на прямой, вдоль которой вибрирует точка подвеса нашего маятника. Можно поэкспериментировать, меняя массу и длину такого маятника, а также амплитуду и частоту колебаний его точки подвеса.

## XXXIX Турнир городов

## Задачи весеннего тура

## БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1. (3)<sup>1</sup> На доске  $6 \times 6$  расставили 6 не угрожающих друг другу ладей. Затем каждое не занятое ладьей поле покрасили по такому правилу: если ладья, угрожающая этому полю, находится от него на одинаковом расстоянии, то это поле закрашивают в красный цвет, а если на разном – то в синий цвет. Могли ли все не занятые поля оказаться:

- (1) красными;
- (2) синими?

*И.Акулич*

2. (4) На гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  отметили точку  $K$ , а на катете  $AC$  – точку  $L$  так, что  $AK = AC$ ,  $BK = LC$ . Отрезки  $BL$  и  $CK$  пересекаются в точке  $M$ . Докажите, что треугольник  $CLM$  равнобедренный.

*Е.Бакаев*

3. В квадрате  $4 \times 4$  расставили целые числа так, что в каждом из восьми рядов (строках и столбцах) сумма чисел одна и та же. Семь чисел известны, а остальные скрыты (см. рисунок). Можно ли по имеющимся данным восстановить:

1	?	?	2
?	4	5	?
?	6	7	?
3	?	?	?

а) (2) хотя бы одно скрытое число;

- (2) хотя бы два скрытых числа?

*Е.Бакаев*

4. (4) См. задачу M2506,а «Задачника «Кванта».

5. (5) На плоскости отметили 30 точек, никакие три из которых не лежат на одной

прямой, и провели 7 красных прямых, не проходящих через отмеченные точки. Могло ли случиться, что каждый отрезок, соединяющий какие-то две отмеченные точки, пересекается хоть с одной красной прямой?

*П.Кожевников*

10–11 классы

1. (3) Биссектриса и высота, проведенные из одной вершины некоторого треугольника, делят его противоположную сторону на три отрезка. Может ли оказаться, что из этих отрезков возможно сложить треугольник?

*М.Евдокимов*

2. (4) См. задачу M2506,б «Задачника «Кванта».

3. (4) Две окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  касаются внешним образом в точке  $T$ . К ним проведена общая внешняя касательная, касающаяся первой окружности в точке  $A$ , а второй – в точке  $B$ . Общая касательная к окружностям, проведенная в точке  $T$ , пересекает прямую  $AB$  в точке  $M$ . Пусть  $AC$  – диаметр первой окружности. Докажите, что отрезки  $CM$  и  $AO_2$  перпендикулярны.

*П.Кожевников*

4. (5) В углу шахматной доски  $8 \times 8$  стоит фишка. Петя и Вася двигают фишку по очереди, начинает Петя. Он делает фишкой один ход как ферзем (пройденной считается только клетка, куда в итоге переместилась фишка), а Вася – два хода как королем (обе клетки считаются пройденными). Нельзя ставить фишку на клетку, где она уже бывала (включая исходную клетку). Кто не сможет сделать ход – проигрывает. Кто из ребят может играть так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл соперник?

*А.Шаповалов*

5. (5) В каждой вершине выпуклого многогранника сходятся три грани. Каждая грань покрашена в красный, желтый или синий цвет. Докажите, что число вершин, в которых сходятся грани трех разных цветов, четно.

*Е.Бакаев, А.Грибалко, И.Раскина*

<sup>1</sup> В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за ее полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов.

## СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

## 8–9 классы

1. (4) В строку выписаны 39 чисел, не равных нулю. Сумма любых двух соседних чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна. Каков знак произведения всех чисел?

*Б. Френкин*

2. (5) У Аладдина есть несколько одинаковых слитков золота, и иногда он просит джинна увеличить их количество. Джинн добавляет тысячу таких же слитков, но после этого берет за услугу ровно половину от получившейся общей массы золота. Мог ли Аладдин оказаться в выигрыше после десяти таких просьб, если ни один слиток не пришлось распиливать?

*А. Перепечко*

3. (6) См. задачу М2511 «Задачника «Кванта»».

4. (6) См. задачу М2510 «Задачника «Кванта»».

5. (8) На улице дома стоят друг напротив друга, всего 50 пар. На правой стороне улицы расположены дома с четными натуральными номерами, на левой – с нечетными натуральными номерами, номера возрастают от начала улицы к концу на каждой стороне, но идут не обязательно подряд (возможны пропуски). Для каждого дома на правой стороне улицы нашли разность между его номером и номером дома напротив, и оказалось, что все найденные числа различны. Наибольший номер дома на улице равен  $n$ . Найдите наименьшее возможное значение  $n$ .

*М. Дидин*

6. (10) В стране рыцарей (всегда говорят правду) и лжецов (всегда лгут) за круглым столом сидят в вершинах правильного десятиугольника 10 человек, среди которых есть лжецы. Путешественник может встать куда-то и спросить сидящих: «Каково расстояние от меня до ближайшего лжеца из вас?» После этого каждый отвечает ему. Какое минимальное количество вопросов должен задать путешественник так, чтобы гарантированно узнать, кто за столом лжецы? (Посторонних рядом нет, на стол вставать нельзя.

Людей считайте точками. Все, включая путешественника, могут точно измерить любое расстояние.)

*М. Дидин*

7. (12) См. задачу М2513 «Задачника «Кванта»».

## 10–11 классы

1. (4) См. задачу 2 сложного варианта для 8–9 классов.

2. (5) См. задачу М2511 «Задачника «Кванта»».

3. (6) В таблице  $10 \times 10$  записано 100 различных чисел. За ход можно выбрать любой составленный из клеток прямоугольник и переставить все числа в нем симметрично относительно его центра («повернуть прямоугольник на  $180^\circ$ »). Всегда ли за 99 ходов можно добиться, чтобы числа возрастали в каждой строке слева направо и в каждом столбце – снизу вверх?

*А. Шаповалов*

4. Правильный треугольник, лежащий в плоскости  $\alpha$ , ортогонально спроектировали на непараллельную ей плоскость  $\beta$ , полученный треугольник ортогонально спроектировали на плоскость  $\gamma$  и получили снова правильный треугольник. Докажите, что:

а) (4) угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  равен углу между плоскостями  $\beta$  и  $\gamma$ ;

б) (4) плоскость  $\beta$  пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\gamma$  по перпендикулярным друг другу прямым.

*Л. Емельянов*

5. (10) См. задачу М2513 «Задачника «Кванта»».

6. (10) Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Лучи  $BA$  и  $CD$  пересекаются в точке  $P$ . Прямая, проходящая через  $P$  и параллельная касательной к окружности в точке  $D$ , пересекает в точках  $U$  и  $V$  касательные, проведенные к окружности в точках  $A$  и  $B$ . Докажите, что окружности, описанные около треугольника  $CUV$  и четырехугольника  $ABCD$ , касаются.

*А. Заславский*

7. (12) Король решил поощрить группу из  $n$  мудрецов. Их поставят в ряд друг за другом (чтобы все смотрели в одном направ-

лении), на каждого наденут черную или белую шляпу. Каждый будет видеть шляпы всех впереди стоящих. Мудрецы по очереди (от последнего к первому) назовут цвет (белый или черный) и натуральное число по своему выбору. В конце подсчитывается число мудрецов, которые назвали цвет, совпадающий с цветом своей шляпы: ровно столько дней всей группе будут платить надбавку к жалованью. Мудрецам разрешили договориться заранее, как отвечать. При этом мудрецы знают, что ровно  $k$  из них безумны (кто именно – им неизвестно). Безумный мудрец называет белый или черный цвет и число вне зависимости от договоренностей. Какое максимальное число дней с надбавкой к жалованью могут гарантировать группе мудрецы, независимо от местонахождения безумных в очереди?

*И. Митрофанов*

### Устный тур для 11 класса

1. Хозяйка испекла квадратный торт и отрезала от него несколько кусков. Первый разрез проведен параллельно стороне исходного квадрата от края до края. Следующий разрез проведен в оставшейся части от края до края перпендикулярно предыдущему разрезу, далее – аналогично (сколько-то раз). Все отрезанные куски имеют равную площадь. Может ли оставшаяся часть торта быть квадратом?

*Б. Френкин*

2. Пусть  $X$  – некоторая фиксированная точка на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  ( $X$  отлична от  $A$  и  $C$ ). Произвольная окруж-

ность, проходящая через  $X$  и  $B$ , пересекает отрезок  $AC$  и описанную окружность треугольника  $ABC$  в точках  $P$  и  $Q$ , отличных от  $X$  и  $B$ . Докажите, что все возможные прямые  $PQ$  проходят через одну точку.

*М. Панов*

3. 16 карточек с целыми числами от 1 до 16 разложены лицевой стороной вниз в виде таблицы  $4 \times 4$  так, что карточки, на которых записаны соседние числа, лежат рядом (соприкасаются по стороне). Какое наименьшее число карточек нужно одновременно перевернуть, чтобы наверняка определить местоположение всех чисел (как бы ни были разложены карточки)?

*М. Евдокимов*

4. Имеется натуральное 1001-значное число  $A$ , а 1001-значное число  $Z$  – то же число  $A$ , записанное от конца к началу (например, для четырехзначных чисел это могли быть 7432 и 2347). Известно, что  $A > Z$ . При каком  $A$  частное  $A/Z$  будет наименьшим (но строго больше 1)?

*А. Толыго*

5. Можно ли расположить в пространстве пять сфер так, чтобы для каждой из сфер можно было провести через ее центр касательную плоскость к остальным четырем сферам? Сферы могут пересекаться и не обязаны иметь одинаковый радиус.

*М. Мурашкин*

6. См. задачу M2512 «Задачника «Кванта».

*Публикацию подготовили  
С. Дориченко, Л. Медников*

# Московская физическая олимпиада школьников 2018 года

## Второй теоретический тур

*7 класс*

1. Активный пенсионер Николай Васильевич купил в магазине катушку клейкой ленты (скотча) без заводской этикетки. Его заинтересовали вопросы: какова длина  $L$  этой ленты и чему равна толщина  $d$  пленки,

из которой лента изготовлена? Николай Васильевич сфотографировал катушку клейкой ленты вместе с линейкой, приложенной в самом широком месте катушки (рис.1). После этого он показал фотографию своим друзьям, задал им свои вопросы и через некоторое время получил ответы – они приведены в таблице. При этом один из друзей честно признался, что длину скотча он узнал

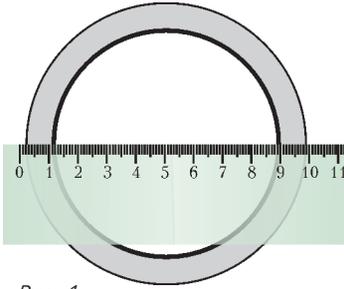


Рис. 1

	Александр Иванович	Федор Петрович	Иван Васильевич
$L, \text{м}$	25	15	5
$d, \text{мкм}$	30	10	80
	Лев Сергеевич	Михаил Владимирович	
$L, \text{м}$	40	50	
$d, \text{мкм}$	15	50	

у продавца в магазине, а затем вычислил толщину при помощи фотографии. Кто из друзей Николая Васильевича правильно ответил на вопросы? Чему равны длина ленты и толщина пленки?

*Примечание:* мкм – это микрон, т.е. одна миллионная часть метра.

*П. Крюков*

**2.** Хронофотография – это разновидность фотографии, позволяющая фиксировать движение какого-либо объекта при помощи фотосъемки отдельных фаз движения. При этом кадры делаются последовательно через равные короткие интервалы времени. Перед вами (рис.2) хронофотография гольфиста, совершающего удар по мячу. Промежуток



Рис. 2

времени между соседними кадрами  $\tau = 16$  мс. Оцените начальную скорость мяча для гольфа. Мяч движется перпендикулярно направлению вашего взгляда. Высота гольфиста 1,8 м.

*А. Бычков*

**3.** Две одинаковые коробки плотно заполнили доверху красными и белыми кубиками одинакового размера. В первой коробке красных кубиков на 26 больше, чем белых, и средняя плотность содержимого коробки равна  $6,6 \text{ г/см}^3$ . Средняя плотность содержимого второй коробки равна  $7,5 \text{ г/см}^3$ . Объем коробки 1 л, масса красного кубика 52 г, белого – 127 г. Кубиков какого цвета во второй коробке больше и на сколько штук?

*А. Бычков*

**4.** Пристань  $B$  расположена ниже пристани  $A$  по течению реки. Между  $A$  и  $B$  курсируют лодка и катер. Лодка стартует из  $A$  одновременно с катером, стартующим из  $B$ . Когда лодка подходит к пристани  $B$ , она разворачивается, затрачивая на разворот пренебрежимо малое время, и идет обратно, доходит до пристани  $A$ , разворачивается и так далее. Катер движется аналогичным образом. Первая встреча катера и лодки произошла через 1 час после начала движения. Когда катер после первой встречи подошел к пристани  $A$ , лодка прошла  $3/5$  расстояния между  $A$  и  $B$ . Вторая встреча катера и лодки произошла у пристани  $B$ , куда они прибыли одновременно.

1) Через какое время после начала движения катер подошел к пристани  $A$ ?

2) Через какое время после первой встречи произошла вторая встреча?

3) Через какое время после второй встречи произойдет третья встреча?

*П. Крюков*

*8 класс*

**1.** В лаборатории у юного химика в двух стаканах хранились две жидкости разного объема: в одном – синяя, а в другом – красная. Однажды химик смешал половину синей и половину красной жидкости в колбе, получив смесь с плотностью  $\rho_1$ . Остатки жидкостей из стаканов он смешал во второй и третьей колбах, при этом плотность смеси во второй колбе оказалась равной  $\rho_2$ , а в

третьей –  $\rho_3$ . Найдите отношение объемов трех получившихся смесей и запишите условие, которому должны удовлетворять плотности этих смесей. Считайте, что при смешивании жидкостей их объемы складываются.

*А.Бычков*

**2.** В последние годы стали популярны выставки, на которых демонстрируют простейшие механизмы, якобы сделанные по чертежам Леонардо да Винчи. На фотографиях (рис.3) показан экспонат одной из

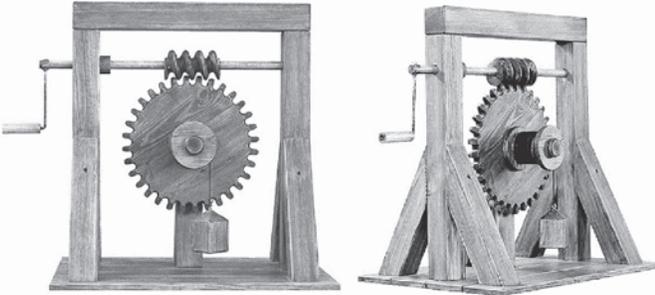


Рис. 3

таких выставок: он называется *червячная передача*. Какой выигрыш в силе (без учета трения) дает это устройство? Считайте, что длина ворота (от ручки до горизонтальной оси) в два раза больше диаметра барабана, на который наматывается веревка.

*П.Крюков*

**3.** В широком поддоне с вертикальными стенками, который частично заполнен водой, стоит доверху наполненный водой стакан. Два цилиндрических груза удерживаются в равновесии с помощью системы блоков и нитей, как показано на рисунке 4. На

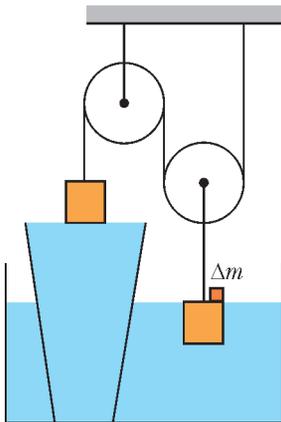


Рис. 4

правом грузе стоит маленький перегрузок массой  $\Delta m$ . При этом левый груз касается поверхности воды своей нижней гранью, а правый груз – верхней. Площадь горизонтального поперечного сечения левого груза  $S$ , а правого  $2S$ . С правого груза очень медленно снимают перегрузок, после чего левый груз оказывается частично погруженным в воду.

1) На сколько изменится высота уровня воды в поддоне?

2) Какая масса воды перельется из стакана в поддон?

3) Какой вид имеет зависимость глубины погружения в воду левого груза от массы перегрузка?

Блоки невесома, нить невесома и нерастяжима, трения нет. Вода из поддона не выливается.

*А.Бычков*

**4.** Очень толстый слой льда имеет температуру  $0^\circ\text{C}$ . Полярник решил провести эксперимент. Для этого он сделал во льду небольшую лунку и накрыл ее слоем теплоизолятора, в который была вставлена тонкая трубка. Через эту трубку полярник очень медленно заливал в лунку неизвестную горячую жидкость с удельной теплоемкостью  $c$  и плотностью  $\rho$ . Жидкость плавил лед, и глубина лунки увеличивалась. Полярник обнаружил, что существует некоторое минимальное значение начальной температуры жидкости  $t_0$ , при котором в лунку можно залить сколь угодно большое количество жидкости и лед будет продолжать плавиться. При этом поверхность образующейся воды никогда не поднимется до верхнего края лунки. Найдите это минимальное значение  $t_0$ . Удельная теплота плавления льда  $\lambda$ , а также плотности воды и льда  $\rho_v$  и  $\rho_l$  известны.

*М.Ромашка*

9 класс

**1.** Материальная точка начинает двигаться прямолинейно вдоль оси  $x$ . Автоматизированная экспериментальная установка очень точно измеряет координату точки через каждую миллисекунду и передает эти данные компьютеру для обработки. Компьютер каждую миллисекунду рассчитывает среднюю путевую скорость  $v_{\text{ср}}$  точки за все время, прошедшее от начала движения до текущего

момента, и строит график зависимости  $v_{cp}$  от времени  $t$  (рис.5). Однако в момент времени  $t_0 = 10$  с экспериментальная уста-

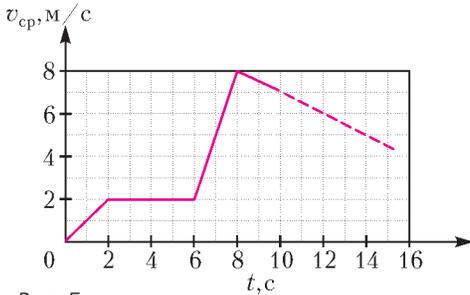


Рис. 5

новка сломалась и перестала передавать компьютеру данные, а материальная точка продолжала двигаться. Определите максимально возможное значение времени  $t$ , до которого убывающий участок графика после 8 с (пунктирная линия на рисунке) мог быть прямолинейным.

*М.Ромашка*

**2.** Дед, бабушка, внучка, Жучка, Мурка и мышка-норушка хотят вытянуть репку. Репка является однородным шаром радиусом  $R$ , на вершине которого расположены многочисленные прочные невесомые длинные листья, за которые репку можно вытягивать. Репка погружена в землю наполовину. Известно, что дед может тянуть с максимальной силой  $F$ , бабушка может тянуть вдвое слабее, внучка — вдвое слабее бабушки, Жучка — вдвое слабее внучки, Мурка — вдвое слабее Жучки, а мышка-норушка — вдвое слабее Мурки. Какова максимально возможная масса репки, если известно, что ее удалось вытянуть? Как должны были герои сказки тянуть такую репку для того, чтобы все же вытянуть ее? Считайте, что репка уже созрела, ее корешки отсохли и она держится в плотно слежавшейся земле только благодаря собственному весу. При вытягивании репка не может вращаться вокруг своей оси симметрии.

*Н.Трушников*

**3.** Сопротивление каждого из резисторов в цепи, схема которой изображена на рисунке 6, одинаково и равно 3 Ом. Напряжение между полюсами идеального источника равно 6 В. Все амперметры идеальные, в центре шестиугольника контакта между проводами

нет. Найдите показания всех амперметров.

*А.Бычков*

**4.** Гуляя по улице в солнечный день, школьник увидел ровную горизонтальную площадку, на которой стояло много вертикальных цилиндрических столбов одинаковой высоты, но разного диаметра. Школьник заметил, что столбы разного диаметра отбрасывают «полные» тени разной длины, несмотря на то что все они имеют одинаковую высоту. Он понял: это происходит из-за того, что солнце не является точечным источником света, а имеет угловой размер  $\alpha \approx 0,5^\circ \approx 0,01$  рад. Заинтересовавшись, школьник стал измерять диаметры столбов  $d$  и длины  $L$  их теней, а затем построил график зависимости  $L(d)$  — этот

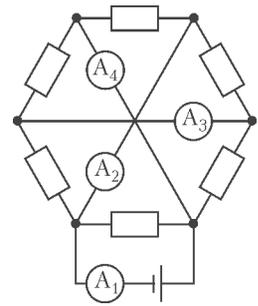


Рис. 6

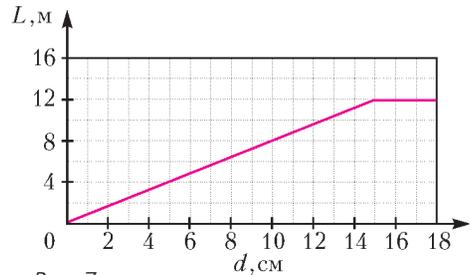


Рис. 7

график показан на рисунке 7. Определите с помощью этого графика высоту столбов.

*М.Ромашка*

*10 класс*

**1.** На фотографии (рис.8), сделанной камерой мобильного телефона, представлен вращающийся пропеллер самолета. Наблюдаемый эффект «смазывания» изображения обусловлен способом обработки светового потока матрицей фотокамеры. Во время срабатывания фотокамеры матрица «захватывает» не всю снимаемую сцену целиком одновременно, а происходит очень быстрое поэтапное сканирование кадра в направлении слева направо (с точки зрения фотографа). В результате в память фотокамеры последовательно попадают узкие вертикальные «полоски» изображения, причем «ли-



Рис. 8

ния сканирования» движется с постоянной скоростью.

1) В каком направлении вращается пропеллер с точки зрения фотографа?

2) Сколько лопастей у пропеллера?

3) Оцените, сколько оборотов в секунду делает пропеллер, если процесс получения всего изображения занял  $1/8$  секунды.

*А.Бычков*

2. Регистрирующая аппаратура установила положения элементарных частиц  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  в некоторый момент, а также их перемещения за время  $\tau$ , считая с этого момента (перемещения показаны на рисунке 9 отрезками). Массы частиц  $C$  и  $D$  одинаковы.

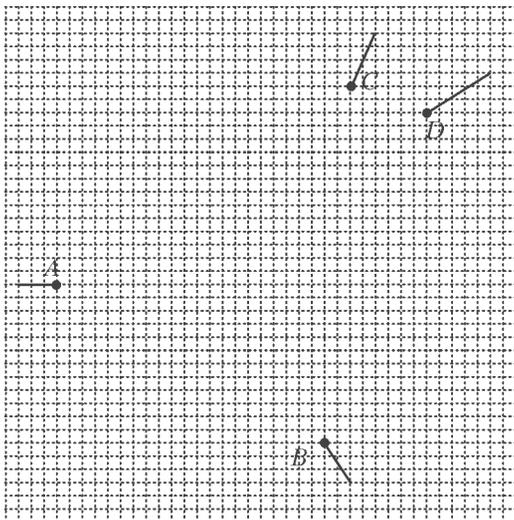


Рис. 9

Была высказана догадка, что эти частицы появились при распаде одной единственной частицы и что она сначала распалась на три частицы, а затем одна из трех образовавшихся частиц распалась на две частицы. Установите, верна ли эта гипотеза, и если да, то определите, через какое время после первого распада произошел второй распад. Считайте, что частицы движутся свободно.

*И.Воробьев*

3. Клин массой  $M = 250$  г с углом  $\alpha = 30^\circ$  при основании покоится на гладкой горизонтальной плоскости. На клин положили брусок массой  $m = 100$  г и ударом сообщили ему некоторую скорость, направленную вверх вдоль наклонной поверхности клина. Найдите, какое количество теплоты  $Q$  выделилось в результате трения бруска о клин, если известно, что максимальная высота, на которую поднялся брусок от своего начального положения, равна  $h = 20$  см. Коэффициент трения бруска о наклонную поверхность клина  $\mu = 0,6$ . Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*С.Чесноков*

4. На горизонтальном участке поля Вася очистил от чистого белого снега площадку размером  $1 \text{ м} \times 1 \text{ м}$ . Под лучами весеннего солнца черная земля прогревается и нагревает расположенный над ней воздух. Тепловая мощность, получаемая воздухом от площадки, равна  $W = 0,3$  кВт, поскольку солнце зимой находится довольно низко над горизонтом. В безветренную и сухую погоду при температуре воздуха  $T_0 = 273$  К и давлении возле поверхности земли  $p = 10^5$  Па столб теплого воздуха, поднимающийся над площадкой, имеет на высоте  $h = 10$  м температуру  $T_1 = 275$  К и поперечное сечение  $S = 2$  м<sup>2</sup>. Температура окружающего воздуха не зависит от высоты и равна  $T_0$ . Молярная масса воздуха  $M = 29$  г/моль, его молярная теплоемкость при постоянном давлении  $C_p = 7R/2$ .

1) Оцените, с какой скоростью поднимается поток воздуха на высоте  $h$ , если процесс уже установился.

2) Оцените, на какую высоту поднялся бы теплый воздух, если бы отсутствовал теплообмен между теплым воздухом и окружающим его холодным воздухом.

*Примечание:* справедлива приближенная формула  $\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{b^2}$ .

А.Бычков, С.Варламов

5. Светодиодная гирлянда состоит из  $n$  параллельно подключенных ветвей, в каждую из которых входит  $m$  последовательно соединенных светодиодов (рис.10). При под-

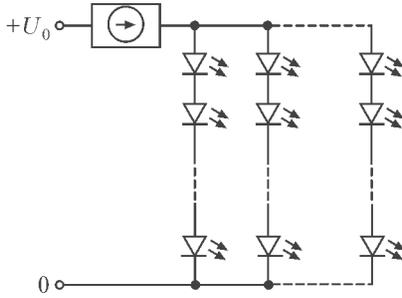


Рис. 10

ключении такой гирлянды к источнику постоянного напряжения часто используют стабилизатор силы тока (изображен на схеме кружком со стрелкой, помещенным внутри прямоугольника). Вольт-амперная характеристика стабилизатора представлена на рисунке 11, а вольт-амперная характеристика одного светодиода показана на рисунке 12. Рабочий участок характеристики светодиода располагается между точками  $A$  и  $B$ : при меньших силах тока излучение светодиода незаметно для глаз, а при больших светодиод может сгореть. Пусть в нашем распоряжении есть много светодиодов для сборки гирлянды, блок питания большой мощности, обеспечивающий постоянное напряжение  $U_0 = 14,9$  В, а также стабилизатор тока.

1) Определите диапазон рабочих токов и напряжений для гирлянды, состоящей из  $n$  ветвей, в каждую из которых включено  $m$  светодиодов. Чему может быть равно  $m$ , если гирлянда работает нормально?

2) Постройте вольт-амперную характеристику для блока питания с последовательно присоединенным к нему стабилизатором.

3) Определите  $m$  и  $n$  для гирлянды, которая обеспечивает максимальную суммарную яркость свечения светодиодов. Считайте яркость пропорциональной электрической мощности, потребляемой светодиодами.

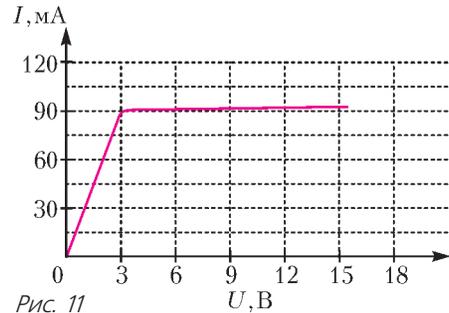


Рис. 11

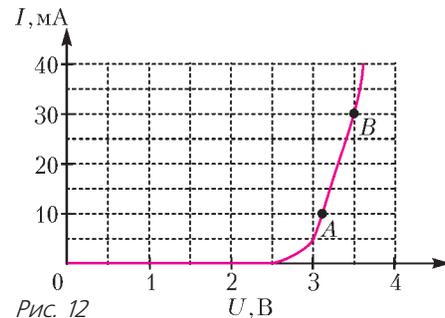


Рис. 12

4) Найдите  $m$  и  $n$  для гирлянды с максимальным КПД.

П.Крюков

11 класс

1. У Васи есть два совершенно одинаковых динамометра с очень легкими пружинами и массивными корпусами. Эти динамометры не отградуированы, но оба имеют шкалы с линейной зависимостью показаний от растяжения пружины. Если к крючку пружины динамометра подвесить груз с известной массой  $m$  и держать динамометр за корпус вертикально, то динамометр показывает некоторое значение  $F_1$ . Если прикрепить тот же груз к корпусу динамометра и удерживать динамометр с грузом в вертикальном положении за крючок пружины, то динамометр показывает другое значение  $F_2$ , причем  $F_2 > F_1$ . Вася привязал груз с неизвестной массой  $M$  между двумя динамометрами и держит сверху эту конструкцию за ее наивысшую точку так, что динамометры занимают вертикальное положение. При этом верхний динамометр показывает значение  $F_3$ , а нижний динамометр показывает значение  $F_4$ . Основываясь на результатах проведенных измерений, Вася вычислил массу  $M$  груза. Чему может быть равна эта масса, если все четыре упомянутых показания динамометров различ-

ны и не равны нулю? Крючок пружины ненагруженного динамометра выступает за пределы его корпуса.

*С.Варламов*

2. На рисунке 13 изображена упрощенная модель центробежного регулятора. Два одинаковых тяжелых груза при помощи легких жестких стержней с длинами  $a$  и шарниров

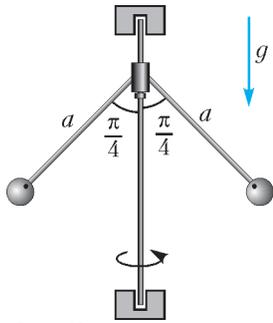


Рис. 13

соединены с вращающимся валом, ось которого вертикальна. Конструкция шарниров позволяет стержням свободно отклоняться от этой оси, однако грузы и вал вращаются с одинаковой угловой скоростью  $\omega$ , которая поддерживается постоянной при помощи внешнего привода. Установившиеся при вращении равновесные положения стержней таковы, что угол между стержнями равен  $90^\circ$ . Определите период малых колебаний грузов относительно положения равновесия при вращении. Трения в шарнирах и в подшипниках крепления вала нет. Размеры грузов малы по сравнению с длиной стержней.

*П.Крюков*

3. Квадратная пластина составлена из проводников двух сортов: серого и белого (рис.14). Удельное сопротивление белого проводника вдвое меньше, чем серого. Сопротивление пластины между вершинами  $A$  и  $B$  равно  $r_1$ . Если через эти вершины пропускать ток силой  $I$ , то идеальный вольтметр, подключенный к вершинам  $C$  и  $D$ , показывает значение напряжения  $U_1$ . После

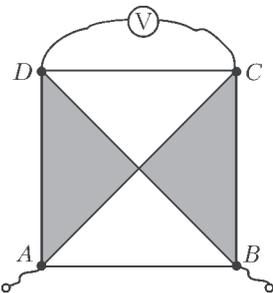


Рис. 14

охлаждения пластины удельное сопротивление белых проводников уменьшилось вдвое, а серых – в восемь раз. Сопротивление пластины между вершинами  $A$  и  $B$  при этом стало равным  $r_2$ , а при пропускании

через эти вершины

прежнего тока силой  $I$  тот же вольтметр стал показывать значение  $U_2$ .

1) Найдите сопротивление пластины между вершинами  $B$  и  $C$  до ее охлаждения.

2) Найдите сопротивление пластины между вершинами  $A$  и  $C$  до ее охлаждения.

*А.Бычков*

4. Нелинейный элемент бареттер обладает свойством поддерживать постоянным силу тока через себя в некотором диапазоне рабочих напряжений от  $U_0$  до  $U_1$  (диапазон напряжений стабилизации). Обозначим эту постоянную силу тока через  $I_0$  (ток стабилизации). При напряжениях, меньших  $U_0$ , бареттер ведет себя как резистор с сопротивлением  $R_0 = U_0/I_0$ . Бареттер на схеме цепи изображается как резистор, перечеркнутый отрезком ломаной линии, похожим на клюшку. Используя бареттер, конденсатор емкостью  $C = 10$  мкФ, идеальную батарейку с ЭДС  $\mathcal{E} = 6$  В, ключ и резистор с сопротивлением  $R$ , собрали цепь, схема которой изображена на рисунке 15. Параметры бареттера: диапазон напряжений стабилизации от  $U_0 = 2$  В до  $U_1 = 6$  В, ток

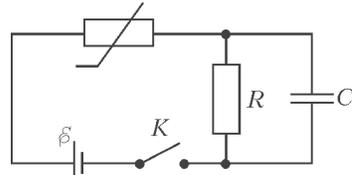


Рис. 15

стабилизации  $I_0 = 20$  мА. Проанализируйте процесс зарядки конденсатора после замыкания ключа при разных значениях сопротивления резистора и ответьте на следующие вопросы.

1) До какого напряжения зарядится конденсатор, если  $R = 50$  Ом? А если  $R = 500$  Ом?

2) Пусть  $R = 200$  Ом. Чему равна сила тока, текущего через резистор в тот момент, когда скорость изменения энергии конденсатора в процессе зарядки максимальна?

3) Пусть  $R = 5000$  Ом. За какое время конденсатор зарядится до половины максимального заряда?

*П.Крюков*

5. См.задачу Ф2507 «Задачника «Кванта».

*Публикацию подготовили А.Бычков, М.Семенов, А.Якута*

# Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

Национальный исследовательский университет «МИЭТ» на протяжении многих лет проводит для старшеклассников олимпиады по математике, физике и информатике, которые пользуются большой популярностью среди школьников Москвы и Московской области. Чтобы расширить круг участников, в 2010 году МИЭТ организовал олимпиаду под названием «Поверь в себя!», которая проходит, используя интернет-технологии. С 2015 года по схожему регламенту стала проводиться олимпиада школьников «Ритм МИЭТ».

В 2018 году университет организовал очную олимпиаду под названием «Физико-математическая олимпиада МИЭТ», которая проходила в 28 различных городах.

Ниже приведены задачи по физике, предлагавшиеся на заключительном туре заочной олимпиады «Ритм МИЭТ», а также варианты по физике для учащихся 10 и 11 классов очной Физико-математической олимпиады МИЭТ.

## Интернет-олимпиада «РИТМ МИЭТ»

### Ф И З И К А

1. С какой горизонтальной скоростью нужно бросить гладкий упругий шарик из точки  $A$ , расположенной на высоте  $h = 1$  м над

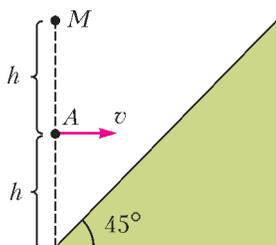


Рис. 1

наклонной плоскостью, составляющей угол  $45^\circ$  с горизонтом, чтобы после абсолютно упругого отскока он попал в мишень  $M$ , расположенную на одной вертикали с точкой  $A$

на высоте  $h$  над ней (рис.1)? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

2. Брусок массой  $m = 0,3$  кг прижимают к вертикальной стене с силой  $F = 4$  Н, направленной перпендикулярно к стене. Коэффициент трения скольжения бруска по стене

$\mu = 0,8$ . Найдите величину результирующей силы, с которой стена действует на брусок. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

3. Первоначально покоившееся свободное твердое тело массой  $M$  начинают обстреливать маленькими пулями одинаковой массы, которые застревают в теле. Скорость каждой пульки можно задавать по своему усмотрению (можно сначала обстреливать быстрыми пулями, потом медленными или как-то иначе). Какую минимальную работу по разгону пулек нужно совершить, чтобы сообщить телу массой  $M$  скорость  $v$ ?

4. Идеальный газ расширяется из начального состояния с температурой  $T_0 = 100$  К в процессе, который задается уравнением  $p^3V = \text{const}$ . При сообщении газу количества теплоты  $Q = 6$  кДж давление газа уменьшилось в  $n = 3$  раза. Определите теплоемкость  $C$  газа в этом процессе.

5. Две одинаковые бусинки массой  $m$  и зарядом  $q$  каждая могут скользить без трения по двум параллельным горизонтально натянутым нитям, расстояние между которыми  $d$  (рис.2). В начальный момент бусинки

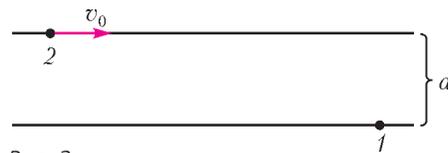


Рис. 2

ки находились на большом по сравнению с  $d$  расстоянии друг от друга, причем первая покоилась, а вторая приближалась к ней с начальной скоростью  $v_0$ . Определите максимальную скорость  $v_{\text{max}}$  первой бусинки при таком движении.

6. В приведенной на рисунке 3 схеме емкость конденсатора  $C = 200$  мкФ, сопротивление резистора  $R = 80$  Ом, ЭДС источника тока  $\mathcal{E} = 4,5$  В, показание амперметра  $I = 45$  мА. Найдите количество теплоты  $Q$ ,

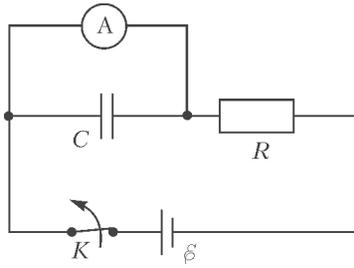


Рис. 3

которое выделится в схеме после размыкания ключа  $K$ . Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.

7. На рисунке 4 приведена зависимость линейного увеличения  $\Gamma$  от расстояния  $f$  от

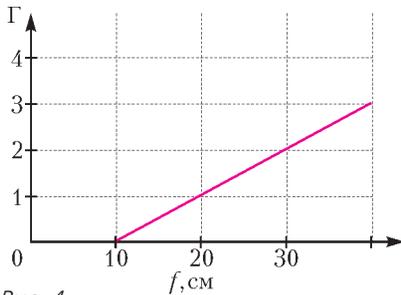


Рис. 4

тонкой линзы до экрана, на котором получают резкое изображение предмета. Определите фокусное расстояние  $F$  линзы.

8. При освещении катода светом с длиной волны  $\lambda_1 = 0,5$  мкм ток фотоэлектронов регистрируется, а при освещении светом с длиной волны  $\lambda_2 = 0,6$  мкм ток фотоэлектронов отсутствует. По результатам этих измерений укажите, в каком диапазоне  $A_2 < A < A_1$  лежит значение работы выхода  $A$  для материала катода. Скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с, постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж  $\cdot$  с.

**Физико-математическая олимпиада  
МИЭТ**

**Ф И З И К А**

10 класс

**ВАРИАНТ 1**

1. Два тела движутся вдоль оси  $x$ . На рисунке 5 приведены графики зависимости проекций скоростей этих тел на ось  $x$  от

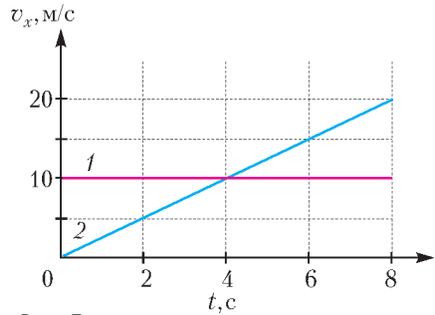


Рис. 5

времени. а) Определите ускорения  $a_1, a_2$  тел. б) Какое расстояние  $L$  было между телами в момент времени  $t = 0$ , если минимальное расстояние между ними при таком движении составило  $L_{\min} = 40$  м?

2. График зависимости давления  $p$  кислорода от его температуры  $T$  при постоянном объеме  $V_1 = 14$  л совпадает с графиком зависимости  $p$  от  $T$  для азота объемом  $V_2 = 8$  л. Во сколько раз отличаются массы этих газов? Газы считать идеальными. Молярная масса кислорода  $M_1 = 32$  г/моль, молярная масса азота  $M_2 = 28$  г/моль.

3. В результате центрального столкновения двух частиц, суммарный импульс которых  $p = |\vec{p}| = 0,2$  кг  $\cdot$  м/с, модуль импульса каждой частицы уменьшился в два раза. Определите модуль начального импульса той частицы, которая в результате столкновения не изменила направление своего движения.

4. К вертикальной железной стене «прилипла» намагниченная шайба массой  $m = 100$  г. К шайбе привязана легкая нить, за которую тянут так, что нить остается параллельной стене. Чтобы перемещать шайбу с постоянной скоростью по стене вертикально вверх, нужно тянуть нить с силой  $F_1 = 3$  Н. а) С какой силой нужно тянуть за нить, чтобы перемещать шайбу с постоянной скоростью вертикально вниз? б) С какой силой нужно тянуть шайбу за нить, чтобы она перемещалась с постоянной скоростью по стене в горизонтальном направлении? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

5. В цепи, схема которой показана на рисунке 6, напряжение  $U = 22$  В, сопротивление  $R = 10$  Ом. а) Определите ток через источник. б) Какое количество теплоты  $Q_1$  выделилось на резисторе сопротивлением  $R$  за время  $\Delta t$ , если за то же время на резис-

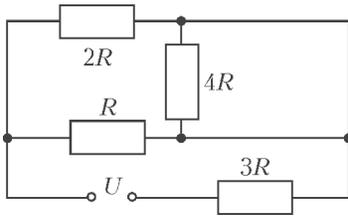


Рис. 6

торе сопротивлением  $3R$  выделилось количество теплоты  $Q_3 = 2,7$  Дж?

**ВАРИАНТ 2**

1. На горизонтальном столе покоится тележка, на тележке – брусок (рис.7). На

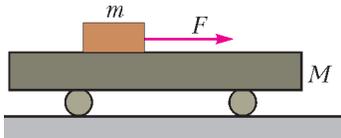


Рис. 7

брусок начинают действовать в горизонтальном направлении с постоянной силой  $F$ , в результате чего тележка и брусок начинают двигаться относительно стола с различающимися в  $n = 2$  раза ускорениями. Найдите силу  $F$ , если масса бруска  $m = 1$  кг, масса тележки  $M = 2$  кг, коэффициент трения бруска о поверхность тележки  $\mu = 0,5$ . Трением качения пренебречь. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

2. На горизонтальном столе у вертикальной стены покоится тележка массой  $4m$  (рис.8).

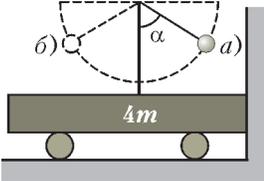


Рис. 8

К закрепленной на тележке штанге на легкой нерастяжимой нити длиной  $L = 90$  см подвешен груз, масса которого в  $k = 4$  раза меньше массы тележки. Нить с грузом отклоняют от вертикали на угол  $\alpha = 60^\circ$  и отпускают без начальной скорости. Найдите скорость груза  $v$  в момент времени, когда он первый раз проходит нижнюю точку своей траектории. Рассмотрите случаи: а) груз отклоняют к стенке; б) груз отклоняют от стенки. Сопротивлением воздуха и трением пренебречь. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

3. В баллоне находилось  $N_1$  атомов гелия

и  $N_2$  молекул азота. После того как половина атомов гелия покинула баллон, давление в нем уменьшилось на  $\delta = 20\%$ . Найдите отношение  $N_2/N_1$ . Температура в баллоне постоянна.

4. В цилиндрическом сосуде под массивным поршнем находится одноатомный идеальный газ (рис.9). Поршень удерживают на высоте  $h = 40$  см от дна сосуда нитью, сила натяжения нити равна  $F = 50$  Н. Какое количество теплоты  $Q$  необходимо подвести к газу, чтобы поршень начал подниматься? Трением поршня о стенки сосуда пренебречь.

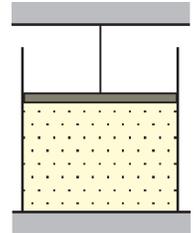


Рис. 9

5. В цепи, схема которой показана на рисунке 10, величина сопротивления  $R = 20$  Ом, а через резисторы  $R$  и  $2R$  протека-

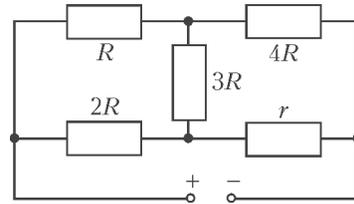


Рис. 10

ют одинаковые токи  $I = 1$  А. Определите: а) напряжение  $U_3$  на резисторе  $3R$ ; б) сопротивление резистора  $r$ .

11 класс

**ВАРИАНТ 1**

1. Два тела движутся вдоль оси  $x$ . На рисунке 11 приведены графики зависимости проекций скоростей этих тел на ось  $x$  от

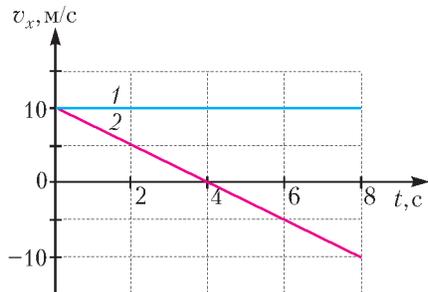


Рис. 11

времени. а) Определите ускорения  $a_1$ ,  $a_2$  тел. б) Какое расстояние  $L$  было между телами в момент времени  $t = 0$ , если в момент времени  $t = 6$  с они встретились?

2. Определите молярную массу  $M_1$  газа, если график зависимости его давления  $p$  от температуры  $T$  при постоянном объеме  $V_1 = 16$  л совпадает с графиком зависимости  $p$  от  $T$  для кислорода той же массы и объемом  $V_2 = 1$  л. Газы считать идеальными. Молярная масса кислорода  $M_2 = 32$  г/моль.

3. Заряженный конденсатор емкостью  $C = 8$  мкФ подключили к источнику ЭДС. После перезарядки конденсатора его энергия оказалась равной первоначальной, а в цепи за время перезарядки выделилось количество теплоты  $Q = 0,4$  мДж. Определите ЭДС источника  $\mathcal{E}$ .

4. К вертикальной железной стене «прилипла» намагниченная шайба. К шайбе привязана легкая нить, за которую тянут так, что нить все время остается параллельной стене. Когда нить тянут вертикально вверх, шайба начинает двигаться при минимальной силе  $F_1 = 1,6$  Н, когда нить тянут вертикально вниз, шайба приходит в движение при силе  $F_2 = 0,6$  Н. а) Найдите массу шайбы  $m$ . б) С какой минимальной силой  $F_3$  нужно тянуть нить в горизонтальном направлении, чтобы сдвинуть шайбу? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

5. В цепи, схема которой показана на рисунке 12, все элементы можно считать

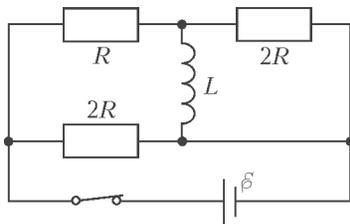


Рис. 12

идеальными, известны ЭДС батареи  $\mathcal{E}$ , сопротивление  $R$ , индуктивность катушки  $L$ . а) Определите ток через катушку, если ключ длительное время замкнут. б) Какое количество теплоты выделится на резисторе  $R$  за длительное время после размыкания ключа?

Вариант 2

1. На горизонтальном столе находятся два бруска (рис.13). Масса нижнего бруска  $M =$

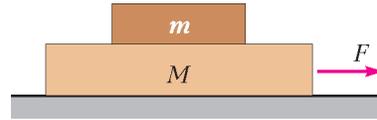


Рис. 13

$= 1$  кг, верхнего  $m = 200$  г, коэффициент трения между брусками  $\mu_1 = 0,5$ , между бруском и столом  $\mu_2 = 0,3$ . К нижнему бруску прикладывают горизонтальную силу  $F$ . Найдите максимальное значение этой силы  $F_{\max}$ , при котором бруски будут двигаться по столу как единое целое. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

2. Тележки массами  $m = 1$  кг и  $M = 2$  кг покоятся на гладком горизонтальном столе. Между тележками помещена легкая сжатая пружинка, перевязанная ниткой. Нитку пережигают, и пружинка начинает расталкивать тележки. Известно, что максимальная скорость легкой тележки  $v_1 = 2$  м/с. а) Чему равна максимальная скорость  $v_2$  тяжелой тележки? б) Найдите начальную энергию  $W$  сжатой пружинки.

3. В вертикальном цилиндрическом сосуде объемом  $V = 5$  л под легким подвижным поршнем содержится некоторое количество гелия при температуре  $T_0$ . Наружное атмосферное давление  $p_0 = 10^5$  Па, поршень находится в равновесии и делит сосуд пополам (рис.14). Газ медленно нагревают, увеличивая его температуру. Сверху сделан упор, который не дает поршню выскочить из сосуда. Какое количество теплоты  $Q$  нужно сообщить газу для его нагревания до температуры  $3T_0$ ? Газ считать идеальным. Трением пренебречь.

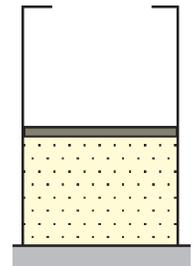


Рис. 14

4. На тонкое непроводящее кольцо радиусом  $R$  надета бусинка массой  $m$  и зарядом  $q$  (рис.15). Кольцо помещено в однородное электрическое поле, вектор  $\vec{E}$  которого лежит в плоскости кольца. Сначала бусинку удерживают в точке  $A$  на диаметре, перпендикулярном силовым

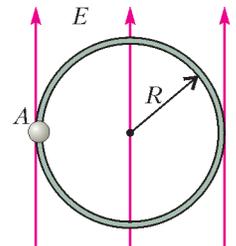


Рис. 15

линиям, а затем отпускают. Найдите максимальную скорость бусинки  $v_{\max}$ . Силами трения и тяжести пренебречь.

5. Прямоугольная проволочная рамка находится в однородном магнитном поле, вектор индукции  $\vec{B}$  которого перпендикулярен плоскости рамки, а модуль  $B$  этого вектора увеличивается со временем  $t$  по линейному закону  $B = \beta t$ , где  $\beta = 0,01$  Тл/с. а) Чему равен ток  $I$  в рамке, если ее площадь  $S = 10$  см<sup>2</sup>, а сопротивление  $R = 2$  Ом? б) Во сколько раз  $n$  уменьшится индукционный ток в рамке после того, как одна из ее половин будет развер-

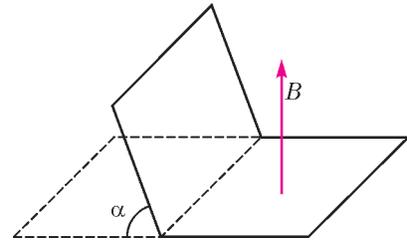


Рис. 16

нута относительно другой на угол  $\alpha = 60^\circ$  (рис. 16)?

Публикацию подготовили  
Г.Гайдуков, И.Горбатый

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

#### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №4)

1. Перевернутая цифра 7.

Если перевернуть картинку, то получится последовательность 5, 6, ..., 8, 9, 10, 11.

2. 21.

*Первое решение.* Заметим, что белых осьминожков было треть от общего количества, и они не перекрашивались. Если сложить 10 и 18, то получится количество всех детей вместе, к которому прибавлено количество белых, т.е.  $4/3$  от количества всех детей. Значит,  $4/3$  от количества детей в семейке равно 28, т.е. всего детей 21.

*Второе решение.* После перекрашивания полосатых осьминожков стало на  $18 - 10 = 8$  больше, чем синих. Значит, полосатыми стали  $8 : 2 = 4$  синих осьминожка. Белых и «старых полосатых» было  $18 - 4 = 14$ , т.е. по  $14 : 2 = 7$  каждого цвета. А всего в разноцветной семейке  $3 \cdot 7 = 21$  ребенок.

3. Например, 1, 2, 4, 8, 975360.

*Комментарий.* Легче проверять делимость, когда большинство чисел записываются 1–2 цифрами, а для этого большинство частных должны быть совсем маленькими (2, 3, ...). Начнем с самой маленькой последовательности: 1, 2, 4, 8. Делится ли оставшееся число на 8, зависит только от его трех последних цифр. Поэтому получить из оставшихся цифр число, делящееся на 8, легко – особенно если поставить на последнее место 0.

Есть много других решений: например, 9, 18, 36, 72, 504.

4. Да, существует (рис.1).

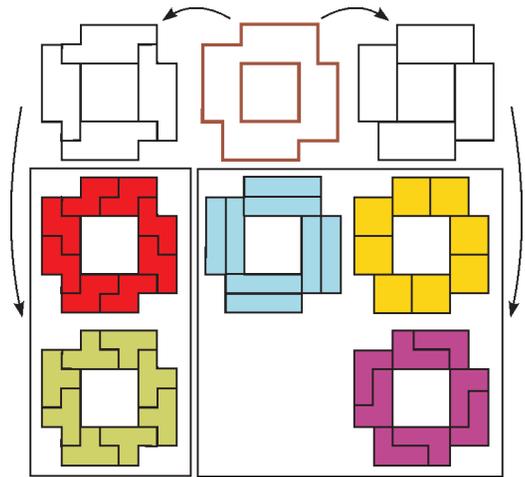


Рис. 1

*Комментарии.* 1) Следить за тем, разрезается ли фигура на фигурки 5 разных видов, тяжело. Но можно заметить, что из двух квадратов можно сложить прямоугольник  $2 \times 4$ , который разрезается и на квадраты, и на полоски, и на L-тетраминошки. А из двух Z-тетраминошек легко сложить «параллелограмм», который разрезается также и на T-тетраминошки. Чтобы решить задачу, остается придумать фигуру, которую можно составить как из прямоугольников  $2 \times 4$ , так и из таких «параллелограммов».

2) В нашем примере фигура не является многоугольником, в ней есть дырка. Существуют ли фигуры с требуемым свойством без дырок, нам неизвестно.

**КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА**

(см. «Квант» №3)

25. а,б) Не всегда.

а) Петя может раскрасить доску в шахматном порядке и на черных клетках написать А, а на белых – Б. На соседних клетках стоят разные буквы, поэтому как бы Вася ни обошел доску, буквы будут чередоваться: АБАБ...АБАБ. Всего клеток четное число, поэтому последняя и первая буквы разные. Значит, последовательность справа налево читается по-другому.

б) Сначала поставим буквы в шахматном порядке так, что букв А на одну больше, чем букв Б. Буквы чередуются при любом обходе и получается строка АБА...АБА. Выберем любую пару клеток с разными буквами и поменяем буквы местами. Тогда при любом обходе получается строка, которая отличается от АБА...АБА в двух местах: в одном А заменено на Б, в другом – Б на А. Эти места не будут симметричны друг другу, поэтому строка слева направо и справа налево читается по-разному.

26. а) Пусть дан прямоугольник  $ABCD$ , точку пересечения его диагоналей обозначим  $O$ . Точки, в которые перейдут вершины, обозначим  $A', B', C', D'$  соответственно.

При симметрии относительно  $BD$  точка  $A$  переходит в  $A', C - в C', O - в себя$  (рис.2).

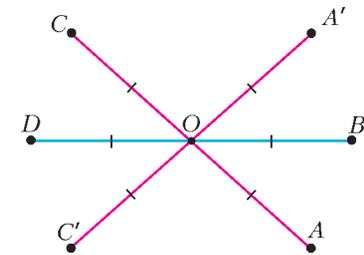


Рис. 2

Значит,  $AC = A'C'$ . Точка  $O$  – середина  $AC$ , следовательно, это также и середина  $A'C'$ .

Те же рассуждения можно провести для диагонали  $BD$ . Таким образом, в четырехугольнике  $A'B'C'D'$  диагонали равны (они равны диагоналям прямоугольника  $ABCD$ ) и их середины совпадают (это точка  $O$ ). Из этого следует, что  $A'B'C'D'$  – прямоугольник.

б) Могут.

Рассмотрим правильный восьмиугольник

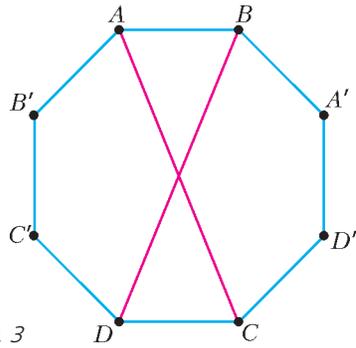


Рис. 3

$ABA'D'CDC'B'$  (рис.3). Тогда  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  – равные прямоугольники. Правильный восьмиугольник симметричен относительно своих диагоналей, значит, вершина  $A$  при симметрии относительно  $BD$  перейдет в  $A', C - в C'$ , а вершины  $B$  и  $D$  при симметрии относительно  $AC$  перейдут, соответственно, в  $B'$  и  $D'$ .

в) Не могут.

В решении пункта а) мы доказали, что диагонали  $A'B'C'D'$  равны диагоналям  $ABCD$ . А у подобных, но не равных, фигур, соответствующие отрезки должны быть разной длины.

27. Петина история не может быть правдой.

Предположим, что Петя прав. Пусть он делил число  $k$  на  $m$ . Если при делении на  $m$  число  $k$  дает остаток  $x$ , то по условию задачи  $k^2$  дает остаток  $2x$ . Тогда число  $k^2 - 2k$  дает остаток  $2x - 2x = 0$ , т.е. делится на  $m$ . Аналогично,  $k^3 - 3k$  делится на  $m$ :

$$k^2 - 2k : m, k^3 - 3k : m.$$

Теперь будем последовательно понижать степень  $k$  в этих выражениях. Сначала избавимся от  $k^3$ : число  $(k^3 - 3k) - k(k^2 - 2k) = 2k^2 - 3k$  делится на  $m$  как разность чисел, кратных  $m$ . Итак, мы перешли к новой паре выражений:

$$k^2 - 2k : m, 2k^2 - 3k : m.$$

Затем избавимся от  $k^2$  в одном из выражений. Рассмотрим разность  $(2k^2 - 3k) - 2(k^2 - 2k) = k$ , она делится на  $m$  как разность чисел, кратных  $m$ . Значит,  $k$  делится на  $m$ , а по условию  $k$  дает ненулевой остаток. Противоречие. Получается, Петя ошибся.

Колына история может быть правдой.

Например, если он делил на 21 степени числа 3: число 3 делится на 21 с остатком 3,  $3^3 = 27$ , что дает остаток 6, а  $3^2 = 9$ .

Этот пример можно обобщить: вместо 3 можно брать любое число вида  $3 + 21n$ , где  $n -$  целое.

28. 10-значных чисел с суммой цифр 9 на одно больше, чем 9-значных чисел с суммой цифр 10.

Каждому числу  $\overline{a_1 a_2 \dots a_k}$  (т.е. числу, которое записывается цифрами  $a_1, a_2, \dots, a_k$  именно в этом порядке) поставим в соответствие последовательность шаров и перегородок по такому правилу. Сначала пойдут  $a_1$  шаров, потом перегородка, за ней  $a_2$  шаров, потом перегородка и так далее, в конце будут перегородка и  $a_k$  шаров.

Например, числу 123 будет соответствовать последовательность  $\circ | \circ \circ | \circ \circ \circ$ , а числу 20500 –  $\circ \circ || \circ \circ \circ \circ ||$ .

Итак, любому натуральному числу соответствует последовательность шаров и перегородок. Понятно, как сделать обратную операцию, т.е. восстановить по последовательности число: количество шаров перед первой перегородкой будет первой цифрой, количество шаров между первыми двумя перегородками – второй цифрой и т.д. Но первая цифра не может равняться нулю и все цифры обязательно меньше 10, значит, последовательность соответствует какому-то числу, только если она начинается с шара и нигде не стоит 10 шаров подряд.

Какие последовательности соответствуют 10-значным числам с суммой цифр 9? В них будет по 9 перегородок и 9 шаров. Кроме того, все они начинаются с шара. Все такие последовательности соответствуют каким-то числам нужного вида, потому что 10 шаров подряд в них стоять не могут. Будем называть их последовательностями вида А.

Какие последовательности соответствуют 9-значным числам с суммой цифр 10? В них будет по 8 перегородок и 10 шаров. Они все начинаются с шара. И последовательности, в которых стоят 10 шаров подряд, получиться не могут. Итак, подходит любая последовательность, начинающаяся с шара, кроме той, где после первого шара сразу стоят 9 шаров, а потом 8 перегородок.

Все такие последовательности (включая ту одну, которая не подходит) будем называть последовательностями вида Б.

Докажем, что последовательностей видов А и Б поровну. Все они начинаются с шара, поэтому его можно отбросить. Последовательности вида А превратятся в такие, где 8 шаров и 9 перегородок идут в произвольном порядке. Последовательности вида Б – в такие, где 9 шаров и 8 перегородок идут в произвольном порядке. Если шары заменить на перегородки, то 8 шаров и 9 перегородок превратятся в 9 шаров и 8 перегородок, т.е. как раз в последовательности другого вида. Значит, последовательностей того и другого вида поровну. Но ровно одна из последовательностей вида Б не соответствует никакому числу. Отсюда делаем вывод, что 10-значных чисел с суммой цифр 9 на

одно больше, чем 9-значных чисел с суммой цифр 10.

*Замечание.* Читатели, знакомые с числами сочетаний, могут убедиться, что количество последовательностей вида А равно  $C_{17}^8$  – сначала стоит шар, а потом выбираем, на каких 8 из 17 оставшихся мест стоят шары. Соответственно, последовательностей вида Б столько же. Известна формула для чисел сочетаний, с помощью которой можно вычислить это количество, –

$$C_{17}^8 = \frac{17!}{8!(17-8)!} = 24310.$$

Желающим познакомиться или разобраться лучше с числами сочетаний (и методом шаров и перегородок) рекомендуем книгу Н.Я.Виленикина, А.Н.Виленикина, П.А.Виленикина «Комбинаторика» (М.: ФИМА, МЦНМО, 2010).

## МОСКОВСКАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2018 ГОДА

### ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

#### 7 класс

1. Правильный ответ дал Михаил Владимирович: длина скотча  $L = 50$  м, а толщина пленки  $d = 50$  мкм ( $Ld = S = \pi \frac{D_1^2 - D_2^2}{4} = \pi \frac{97^2 - 79^2}{4} \text{ мм}^2 \approx 2,49 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \approx 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ ).

2. На хронофотографии видно три изображения мяча (см. рисунок к условию). Два верхних изображения менее яркие, потому что мяч находится в движении, а нижнее изображение – это покоящийся мяч. Нас будут интересовать менее яркие изображения. Скорость мяча в момент удара может быть оценена как  $v = \frac{s}{\tau}$ , где  $s$  – расстояние, пройденное мячом за промежуток времени между соседними кадрами. Расстояние  $s$  можно оценить, составив пропорцию:  $s$  так относится к высоте гольфиста, как относятся друг к другу длины соответствующих отрезков на фотографии (их можно измерить при помощи линейки либо с использованием клетчатой бумаги):

$$\frac{s}{1,8} \approx \frac{4}{8} = 0,5, \text{ и } s \approx 0,9 \text{ м}.$$

Тогда

$$v = \frac{0,9 \text{ м}}{16 \cdot 10^{-3} \text{ с}} \approx 56 \text{ м/с}.$$

3. Достанем из первой коробки один красный кубик и заменим его белым. Тогда плотность содержимого этой коробки изменится на

$$\begin{aligned} \Delta \rho &= \frac{(k-1)m_1 + (p+1)m_2}{V} - \frac{km_1 + pm_2}{V} = \\ &= \frac{m_2 - m_1}{V} = \frac{127 - 52}{1000} \text{ г/см}^3 = 0,075 \text{ г/см}^3, \end{aligned}$$

где  $k$  – количество красных кубиков,  $p$  – количество белых кубиков до замены,  $V$  – объем коробки. Будем проделывать эту операцию до тех пор, пока средняя плотность содержимого первой коробки не станет равной средней плотности второй коробки. Количество таких операций равно

$$N = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta\rho} = \frac{0,9}{0,075} = 12,$$

т.е. количество красных кубиков уменьшится на 12 штук, а количество белых – увеличится на такую же величину. Следовательно, во второй коробке красных кубиков на 2 больше, чем белых.

4. Перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $u$  течения реки. Пусть ось  $x$  этой системы направлена по течению реки от  $A$  к  $B$ , пристань  $A$  в начальный момент времени располагается в точке с нулевой координатой, а пристань  $B$  – в точке с координатой  $L$ , пристани  $A$  и  $B$  движутся в отрицательном направлении оси  $x$  со скоростью течения  $u$ , катер движется относительно воды со скоростью  $v_2$ , а лодка – со скоростью  $v_1$ . Ясно, что в данной системе отсчета скорости  $v_2$  и  $v_1$  не зависят от того, в какую сторону движется катер или лодка. Изобразим схематически (рис.4) зависимости координат при-

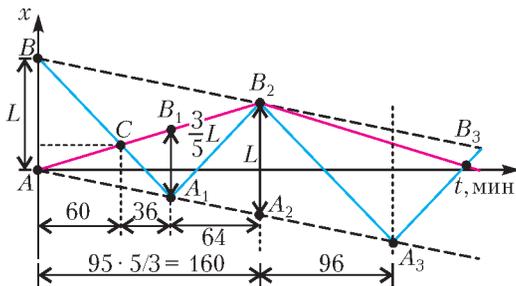


Рис. 4

станей (черные пунктирные линии), катера (синие линии) и лодки (красные линии) от времени. Точка  $C$  пересечения графиков соответствует месту первой встречи катера и лодки, точка  $B_1$  соответствует положению лодки в тот момент времени, когда катер подошел к пристани  $A$ . Теперь можно ответить на вопросы задачи.

1) За первые 60 мин катер и лодка, двигаясь со скоростью сближения  $v_1 + v_2$ , прошли суммарное расстояние  $L$ . Затем они удалялись друг от друга с той же скоростью и, когда катер подошел к пристани  $A$ , разъехались на расстояние  $3L/5$  за время  $(3/5) \cdot 60$  мин = 36 мин. Таким образом, катер пришел в  $A$  через 96 мин.

2) За время 96 мин лодка и пристань  $A$  разъехались на расстояние  $3L/5$ , следовательно, на расстояние  $L$  они разъедутся за время

$96 \cdot (5/3)$  мин = 160 мин. Значит, вторая встреча катера и лодки произошла через 160 мин – 96 мин = 64 мин после первой.

3) Приравниваем координаты катера и пристани  $B$  в момент их встречи (точка  $B_2$ ):  $L - 96v_2 + 64v_2 = L - 160u$ , откуда  $v_2 = 5u$ . Катер прошел по течению со скоростью  $u + v_2 = 6u$  расстояние  $L$  за время 64 мин, а лодка то же расстояние прошла со скоростью  $u + v_1$  за время 160 мин. Поэтому  $u + v_1 = \frac{64}{160} \cdot 6u$ , и  $v_1 = 7u/5$ .

Для того чтобы найти время  $t_3$ , через которое катер и лодка встретятся в третий раз, нужно решить уравнение, которое получится, если приравнять изменения координат лодки и катера в промежутке от второй до третьей встречи. Лодка плыла до встречи все время в одном направлении со скоростью  $7u/5$  в течение времени  $t_3$ . Катер же, двигаясь со скоростью  $5u$ , за 96 мин доплыл до противоположной пристани, развернулся и затем в течение  $(96 - t_3)$  мин догонял катер, двигаясь с прежней скоростью. Поэтому

$$-\frac{7}{5}u \cdot t_3 = -5u \cdot 96 + 5u \cdot (t_3 - 96).$$

Отсюда находим

$$t_3 = 150 \text{ мин.}$$

8 класс

1. Пусть  $\alpha = \frac{V_2}{V_3}$ , где  $V_2$  – объем второй смеси,  $V_3$  – объем третьей смеси. Заметим, что если смешать вторую и третью смеси, то получится жидкость плотностью  $\rho_1$ . Тогда

$$\rho_1 = \frac{\alpha\rho_2V_3 + \rho_3V_3}{\alpha V_3 + V_3} = \frac{\alpha\rho_2 + \rho_3}{\alpha + 1}, \text{ и } \alpha = \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Для отношения объемов получаем

$$V_1 : V_2 : V_3 = (V_2 + V_3) : V_2 : V_3 = (\alpha + 1) : \alpha : 1 = (\rho_3 - \rho_2) : (\rho_3 - \rho_1) : (\rho_1 - \rho_2).$$

Это соотношение имеет смысл при выполнении условия  $\rho_3 > \rho_1 > \rho_2$ .

Поскольку можно записать, что  $\alpha = \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_1 - \rho_2}$ , то возможен и другой вариант ответа:

$$V_1 : V_2 : V_3 = (\rho_2 - \rho_3) : (\rho_1 - \rho_3) : (\rho_2 - \rho_1).$$

Он реализуется при условии  $\rho_2 > \rho_1 > \rho_3$ .

2. При повороте «червяка» на  $360^\circ$  шестеренка поворачивается на угол, соответствующий угловому размеру одного зуба. Таким образом, для того чтобы шестеренка повернулась на  $360^\circ$ , необходимо, чтобы «червяк» совершил  $n$  оборотов вокруг оси, где  $n$  – количество зубьев шестеренки. По фотографии (см. условие) можно оп-

ределить, что для данного устройства  $n = 32$ . Обозначим через  $R$  длину ворота, за который вращают ось «червяка», а через  $r$  – радиус барабана, на который наматывается веревка. Тогда  $R = 4r$ , ручка ворота за  $n$  оборотов проходит расстояние  $L = n \cdot 2\pi R$ , при этом груз, подвешенный на веревке к барабану, поднимается на высоту  $H = 2\pi r$ . Если не учитывать потери на трение, то выигрыш в силе у этого механизма равен отношению расстояний  $L$  и  $H$ :

$$N = \frac{L}{H} = \frac{nR}{r} = 4n = 128.$$

Обратим внимание на то, что не всегда в червячной передаче передаточное число равно количеству зубьев шестеренки. Это справедливо только в случае однозаходной резьбы (как в нашей задаче). В случае многозаходной резьбы передаточное число будет меньше числа зубьев шестеренки в число заходов резьбы.

**3. 1)** При опускании левого груза вода из стакана будет переливаться в поддон. Объем вытесненной из стакана воды равен объему погруженной части левого груза. Смещение левого груза вдвое больше смещения правого, при этом площадь сечения левого груза, наоборот, вдвое меньше площади сечения правого груза. Значит, уровень воды в поддоне не изменится.

**2)** Запишем условие равновесия для системы «вся вода + два груза» до и после снятия перегрузка:

$$Mg + \Delta mg - 3T_1 - F = 0,$$

$$Mg - 3T_2 - F = 0,$$

где  $M$  – масса системы,  $T_1$  – модуль силы натяжения нити, прикрепленной к левому грузу до снятия перегрузка,  $T_2$  – модуль силы натяжения той же нити после снятия перегрузка,  $F$  – модуль силы, действующей на систему со стороны дна стакана и дна поддона (она не изменилась, так как уровни воды в поддоне и в стакане при смещении грузов не изменились). Тогда

$$T_1 - T_2 = \frac{\Delta mg}{3}.$$

Эта разность равна весу воды, вытесненной левым грузом при погружении. Значит, масса вылившейся из стакана воды равна  $\Delta m/3$ .

**3)** Запишем условие равновесия для левого груза до и после снятия перегрузка:

$$mg - T_1 = 0,$$

$$mg - T_2 - \rho g S \Delta x = 0,$$

где  $m$  – масса левого груза,  $\Delta x$  – глубина

погружения левого груза после снятия перегрузка. Отсюда получаем

$$\rho g S \Delta x = T_1 - T_2 = \frac{\Delta mg}{3}, \text{ и } \Delta x = \frac{\Delta m}{3\rho S},$$

т.е. зависимость глубины погружения в воду левого груза от массы перегрузка прямая пропорциональная.

**4.** Пусть в лунку залита неизвестная жидкость массой  $m$  и в результате теплообмена расплавился лед массой  $m_1$ . Уравнение теплового баланса для этого процесса имеет вид  $cm t_0 = \lambda m_1$ . В результате плавления льда объем лунки увели-

чился на  $V_1 = \frac{m_1}{\rho_{\text{л}}} = \frac{cm t_0}{\lambda \rho_{\text{л}}}$ . Объем воды, образовавшейся при таянии льда, равен  $V_2 = \frac{m_1}{\rho_{\text{в}}} = \frac{cm t_0}{\lambda \rho_{\text{в}}}$ .

Объем неизвестной жидкости, залитой в лунку, равен  $V_3 = \frac{m}{\rho}$ . Плавление может продолжаться

бесконечно (т.е. массу  $m$  заливаемой в лунку жидкости можно увеличивать неограниченно) при условии  $V_1 \geq V_2 + V_3$ . При искомой минимальной температуре неизвестной жидкости  $t_0$  имеем равенство  $V_1 = V_2 + V_3$ , или  $\frac{cm t_0}{\lambda \rho_{\text{л}}} = \frac{cm t_0}{\lambda \rho_{\text{в}}} + \frac{m}{\rho}$ . Отсюда получаем

$$t_0 = \frac{\lambda \rho_{\text{в}} \rho_{\text{л}}}{c\rho(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}.$$

*9 класс*

**1.** Рассмотрим линейный участок графика, начинающийся в момент времени  $\tau = 8$  с (см. рисунок к условию). Зависимость средней путевой скорости от времени  $t$  для этого участка задается формулой  $v_{\text{cp}}(t) = 12 - \frac{1}{2}t$ , а зависимость пройденного точкой пути от времени на этом участке имеет вид  $s(t) = v_{\text{cp}}(t) \cdot t = 12t - \frac{t^2}{2}$ . Пока точка движется в одном направлении, пройденный ею путь совпадает с координатой, поэтому зависимость координаты от времени также имеет вид  $x(t) = 12t - \frac{1}{2}t^2$ , т.е. движение является равнозамедленным. Поэтому проекции начальной скорости и ускорения точки на ось  $x$  равны  $v_{0,x} = 12$  м/с и  $a_x = -1$  м/с<sup>2</sup>, если время  $t$  отсчитывать от момента начала движения (в действительности описываемый полученными формулами режим движения начинается с момента  $\tau = 8$  с).

Зависимость проекции скорости на ось  $x$  от времени для рассматриваемого участка имеет вид

$$v_x(t) = 12 - t,$$

откуда следует, что эта проекция является по-

ложительной до момента времени  $t_{\max} = 12$  с. Заметим, что путь – это неубывающая функция времени. Если предположить, что после поломки установки точка продолжала двигаться по полученному выше закону  $x(t)$ , то после момента  $t_{\max} = 12$  с пройденный точкой путь должен начать уменьшаться, что невозможно. Поэтому убывающий участок графика мог быть прямолинейным только до момента времени  $t_{\max} = 12$  с. Разумеется, характер движения точки мог измениться и раньше. Отметим также, что ответ не зависит от конкретного вида участков графика до момента  $\tau = 8$  с, а при переходе от одного участка к другому скорость могла изменяться.

**2.** Если вся компания выстроится цепочкой и все будут тянуть друг за друга, то приложить к репке силу, превышающую  $F$ , герои сказки не смогут. Компания сможет приложить к репке максимально возможную силу, превышающую  $F$ , только в том случае, если каждый член команды будет тянуть за один или за несколько листьев, причем все будут тянуть в одном направлении. Для того чтобы вытащить репку с максимально возможной массой, необходимо прикладывать к репке максимально возможный момент силы. Сила к репке прикладывается в верхней точке и может быть направлена в любом направлении. Максимальный момент силы достигается тогда, когда одновременно максимальны модуль силы и плечо этой силы. Будем искать максимальные значения этих величин по отдельности.

Максимально возможный модуль силы, как уже говорилось, достигается тогда, когда все работники тянут репку за разные листья (каждый за свой) в одном направлении. Тогда модули прикладываемых ими сил просто складываются:

$$F_{\max} = F + \frac{F}{2} + \frac{F}{4} + \frac{F}{8} + \frac{F}{16} + \frac{F}{32} = \frac{63}{32}F.$$

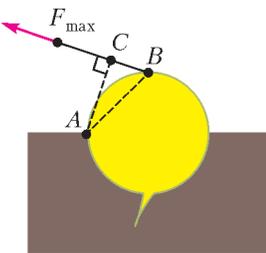


Рис. 5

Осталось вычислить длину максимально возможного плеча силы. На рисунке 5 показаны точка опоры  $A$ , направление действия силы  $F_{\max}$  и плечо этой силы  $AC$ . Ясно, что максимально возможное плечо – это  $AB = R\sqrt{2}$ .

Для начала подъема репки необходимо, чтобы момент приложенной к ней силы  $F_{\max}$  был больше момента силы тяжести, вычисленного относи-

тельно точки  $A$  (или хотя бы сравнялся с ним):

$$\frac{63}{32}FR\sqrt{2} \geq mgR.$$

Отсюда находим

$$m \leq \frac{63\sqrt{2}}{32} \frac{F}{g} \approx 2,78 \frac{F}{g}.$$

Отметим, что в процессе вытаскивания репки момент силы тяжести относительно точки  $A$  будет монотонно уменьшаться, а значит, максимально возможного момента приложенной силы будет заведомо достаточно для полного вытягивания корнеплода.

**3.** Из симметрии электрической цепи следует, что через амперметр  $A_3$  ток не течет и проводник, соединяющий точки, между которыми включен этот амперметр, можно убрать. На рисунке 6 представлена эквивалентная схема цепи. Общее сопротивление такой цепи равно  $1$  Ом. Значит, амперметр  $A_1$  показывает  $6$  А. Через резисторы, изображенные на схеме исходной цепи сверху и снизу, текут токи по  $2$  А, а через резисторы, изображенные слева и справа, текут токи по  $1$  А. Из закона сохранения электрического заряда следует, что каждый из амперметров  $A_2$  и  $A_4$  показывает  $3$  А.

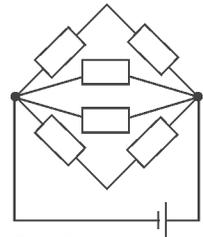


Рис. 6

**4.** Пусть высота столбов  $H$ , а угол восхождения Солнца над горизонтом  $\varphi$ . Если бы Солнце было точечным источником света, то длина всех теней была бы одинакова и равна  $L_0 = H \operatorname{ctg} \varphi$  (рис.7). В действительности Солнце имеет конечный угловой размер  $\alpha$ . На рисунке 8 изображен вид сверху на ту площадку, где находился

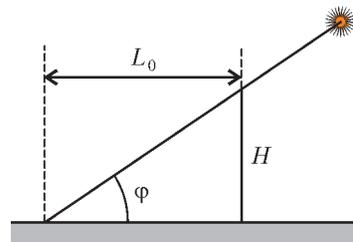


Рис. 7

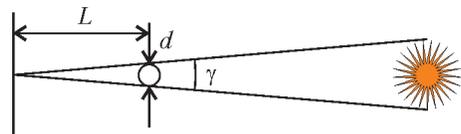


Рис. 8

школьник. Угловой размер ортогональной проекции солнца на плоскость этой площадки равен  $\gamma = \frac{\alpha}{\cos \varphi}$ . Из рисунка находим длину тени столба диаметром  $d$ :  $L = \frac{d}{\gamma} = \frac{d \cos \varphi}{\alpha} = kd$ , где  $k = \frac{\cos \varphi}{\alpha}$ . Длина тени будет увеличиваться с ростом диаметра столба до тех пор, пока она не достигнет максимального значения  $L_0 = 12$  м, соответствующего самому толстому столбу, который имеет диаметр 15 см. Из графика определяем  $k = 0,8$  м/см = 80. Далее находим

$$H = L_0 \operatorname{tg} \varphi = L_0 \frac{\sqrt{1 - (k\alpha)^2}}{k\alpha} = 9 \text{ м}.$$

Если провести подсчет более точно, то получается  $H \approx 12$  м (такая большая разница возникает из-за грубого округления  $\alpha \approx 0,5^\circ \approx 0,01$  рад).

### 10 класс

1. 1) Пропеллер вращается против часовой стрелки, так как изображения лопастей в верхней части фотографии (см. рисунок к условию) расположены ближе друг к другу (в этой области лопасти движутся навстречу «линии сканирования»), чем в нижней области фотографии.
- 2) В левой части фотографии на рисунке 9 расположены «смазанные» изображения двух ближайших друг к другу лопастей пропеллера. Вертикальной линии соответствует момент, когда концы этих двух лопастей находились на одной вертикали. Непосредственно видно, что угол между лопастями больше 90 градусов. Менее очевидно, что этот угол близок к 120 градусам (но в этом можно убедиться при наличии транспортира). Следовательно, у пропеллера три лопасти.
- 3) Поскольку лопастей три, то каждая третья

полоса на рисунке – это изображение, полученное при сканировании одной и той же лопасти в разные моменты времени. На рисунке 10 цифрами без штрихов отмечены положения соседних лопастей, а цифрами со штрихами – положения этих же лопастей в последующие моменты времени. Найдем время  $t$ , за которое «линия сканирования» прошла расстояние, равное длине отрезка, изображенного в средней части фотографии на рисунке 11. Отношение этого времени к времени получения полного кадра равно отношению длины упомянутого отрезка к ширине кадра. Поэтому  $t \approx 0,1$  с. За это время лопасть 1 сделала полтора оборота. Следовательно, за одну секунду лопасть делает примерно 15 оборотов.

2. Так как частицы движутся свободно, то можно считать скорости всех частиц неизменными по модулю и по направлению. Если две частицы вылетели одновременно из одной точки (места распада), то их траектории – отрезки, выходящие из этой точки, а модули перемещений за любое время полета относятся как модули скоростей. Восстановим на чертеже траектории частиц, продолжая отрезки, задающие перемещение за время  $\tau$  (рис.12). Получится всего 6 точек пересечения траекторий. Но из них как места распада годятся только две – точки 1 и 2 на рисунке. Для частиц  $A$  и  $B$  время полета от места распада 1 до конечных положений, указанных точками  $A$  и  $B$ , одинаково и равно  $4\tau$ . Для частиц  $C$  и  $D$  время полета от точки 2 до конечных положений равно  $2\tau$ . Поэтому второй распад происходит позже первого на время  $4\tau - 2\tau = 2\tau$ . Из закона сохранения импульса в случае равных масс частиц  $C$  и  $D$  найдем вектор скорости  $\vec{v}$  частицы, распавшейся в точке 2 на  $C$  и  $D$ :  $2m\vec{v} = m\vec{v}_C + m\vec{v}_D$ , откуда  $\vec{v} = (\vec{v}_C + \vec{v}_D)/2$ . Если эта частица появилась при первом распаде

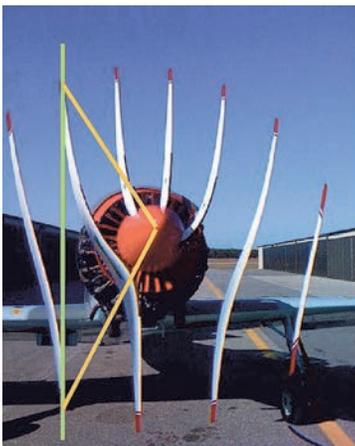


Рис. 9

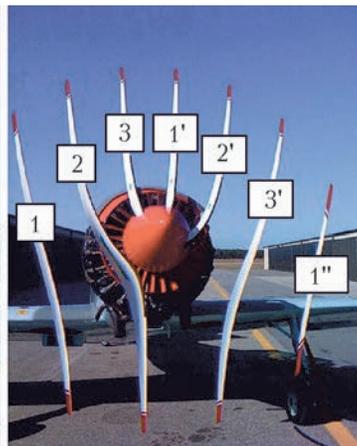


Рис. 10

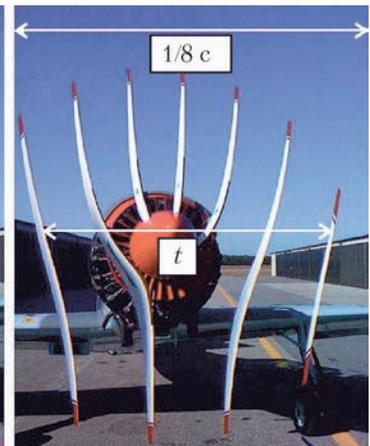


Рис. 11

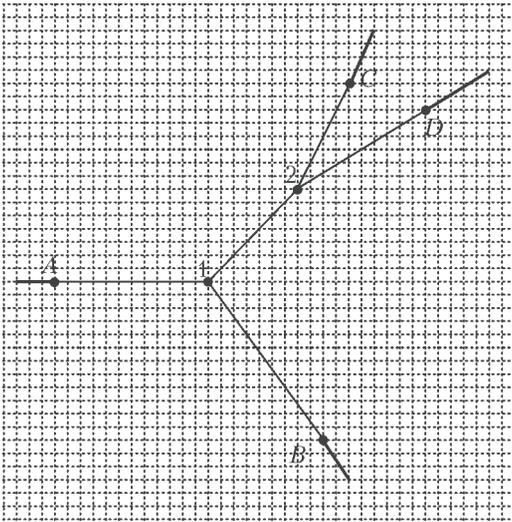


Рис. 12

в точке 1, то ее перемещение от точки 1 до точки 2 должно совпасть с вектором  $\vec{v} \cdot 2\tau = (\vec{v}_C + \vec{v}_D)\tau = \vec{l}_C + \vec{l}_D$ . И это совпадение, как видно из рисунка, действительно обнаруживается. Таким образом, высказанная догадка верна.

3. Брусок и клин движутся под действием сил, изображенных на рисунке 13,  $\vec{a}$  – ускорение бруска в неподвижной системе отсчета,  $\vec{a}_0$  –

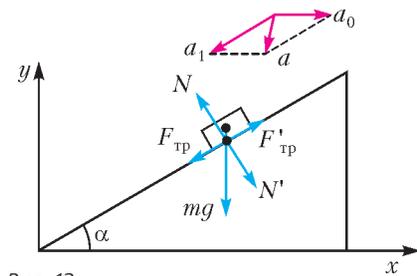


Рис. 13

ускорение клина,  $\vec{a}_1$  – ускорение бруска относительно клина. Запишем уравнения движения бруска и клина в проекциях на оси  $x$  и  $y$ :

$$ma_1 \cos \alpha - ma_0 = N \sin \alpha + \mu N \cos \alpha,$$

$$ma_1 \sin \alpha = mg - N \cos \alpha + \mu N \sin \alpha,$$

$$Ma_0 = N \sin \alpha + \mu N \cos \alpha$$

и найдем модуль силы нормального давления бруска на поверхность клина:

$$N = \frac{mg \cos \alpha}{1 + \frac{m}{M} \sin \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}.$$

Модуль суммарной работы сил  $\vec{F}_{тр}$  и  $\vec{F}'_{тр}$  равен произведению модуля силы трения скольжения на модуль перемещения бруска относитель-

но клина:  $|A_{тр}| = \frac{\mu N h}{\sin \alpha}$ . По закону изменения механической энергии количество теплоты, выделившееся при скольжении бруска по клину, равно этой работе, поэтому

$$Q = \frac{\mu m g h c t g \alpha}{1 + \frac{m}{M} \sin \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} \approx 0,17 \text{ Дж}.$$

4. 1) Поток теплого воздуха уносит с собой от места нагревания некоторое количество теплоты, и мощность этой теплоотдачи равна мощности, поступающей к воздуху от очищенного от снега участка. Если скорость подъема потока на высоте  $h$  обозначить через  $u$ , то масса воздуха, поднимающегося в потоке в единицу времени, равна  $\frac{\Delta M}{\Delta t} = \rho S u = \frac{S u M p}{R T_1}$ . Для того чтобы нагреть этот воздух на  $\Delta T = T_1 - T_0$ , нужна мощность

$$W = \frac{C_p \Delta M}{M \Delta t} \Delta T = \frac{7 S u p (T_1 - T_0)}{2 T_1},$$

Отсюда находим

$$u = \frac{2 T_1 W}{7 S p (T_1 - T_0)} \approx 0,06 \text{ м/с}.$$

2) Столб воздуха будет подниматься вверх до тех пор, пока его плотность не станет равной плотности окружающего воздуха на той же высоте. Кроме того, на этой высоте давление воздуха в столбе равно давлению окружающего воздуха, а значит, одинаковы и их температуры. Температура воздуха в столбе снижается с увеличением высоты из-за адиабатического расширения. Из уравнения Клапейрона–Менделеева найдем изменение объема расширяющейся порции воздуха:

$$\Delta V = \nu R \Delta \left( \frac{T}{p} \right) = \nu R \frac{p \Delta T - T \Delta p}{p^2}.$$

Согласно первому началу термодинамики,

$$C_V \nu \Delta T + p \Delta V = 0.$$

Отсюда, учитывая, что  $C_V + R = C_p$ , получаем

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{R}{C_p} \frac{\Delta p}{p}.$$

Оценим изменение давления на высоте  $h$ : оно равно  $\Delta p \approx \rho g h = \frac{M p g h}{R T_0}$ . Тогда для максимальной высоты подъема воздуха получаем оценку

$$H \approx \frac{R T_0 \Delta p}{M p g} = \frac{C_p \Delta T}{M g} = \frac{7 R \Delta T}{2 M g} \approx 200 \text{ м}.$$

5. 1) В качестве нижнего значения рабочего напряжения одного светодиода можно принять

величину 3,1 В, соответствующую точке А. Вольт-амперная характеристика цепи, состоящей из  $m$  последовательно соединенных светодиодов, получается из вольт-амперной характеристики одного светодиода путем ее растяжения в  $m$  раз в горизонтальном направлении. При параллельном соединении в гирлянде  $n$  одинаковых ветвей вольт-амперная характеристика одной ветви растягивается в  $n$  раз вдоль оси ординат. Из этих рассуждений следует

$$3,1m \leq U \leq 3,5m, \quad 10n \leq I \leq 30n.$$

Напряжение на гирлянде не может превышать напряжение источника 14,9 В, поэтому из первого неравенства сразу следует  $1 \leq m \leq 4$ .

2) Пусть теперь светодиодная гирлянда подключена к блоку питания через стабилизатор. Напряжение на гирлянде  $U_r$  определяется соотношением  $U_r = U_0 - U_c$ , где  $U_c$  – напряжение на стабилизаторе. Зная вольт-амперную характеристику стабилизатора, можно построить график зависимости  $I(U)$  для правой части записанного уравнения. В результате получается график, показанный на рисунке 14.

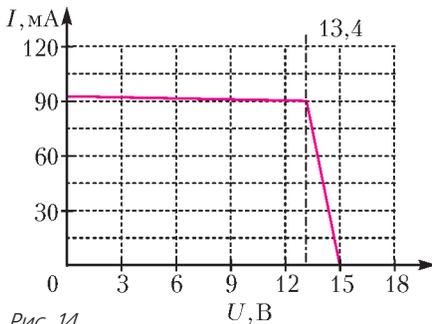


Рис. 14

3) Сила текущего через гирлянду тока и напряжение на ней соответствуют некоторой точке, назовем ее рабочей, на полученном графике. Легко видеть, что максимальная мощность гирлянды достигается в том случае, если рабочая точка совпадает с изломом графика – он соответствует напряжению 13,4 В при токе 90 мА. Следовательно, если при каком-либо соединении светодиодов в гирлянду реализуется указанная рабочая точка, то в каждой ветви стоит  $m = 4$  последовательно соединенных светодиода. Для того чтобы определить  $n$ , выразим силу тока на прямолинейном участке вольт-амперной характеристики всей гирлянды через напряжение на гирлянде, используя график линейного участка вольт-амперной характеристики одного диода:

$$I_r = n \left( 10 \text{ мА} + \frac{25 \text{ мА}}{0,5 \text{ В}} \cdot \left( \frac{U_r}{4} - 3,1 \text{ В} \right) \right).$$

Подставляя сюда значения силы тока и напряжения, соответствующие точке излома графика, т.е.  $U_r = 13,4$  В и  $I_r = 90$  мА, получим  $n = 4$ .  
4) Найдем теперь КПД гирлянды:

$$\eta = \frac{U_r I_r}{U_0 I_r} = \frac{U_0 - U_c}{U_0} = 1 - \frac{U_c}{U_0}.$$

Для того чтобы КПД гирлянды был максимальным, напряжение  $U_c$  на стабилизаторе должно быть минимальным, т.е. как можно ближе к  $U_0$ . Логическими рассуждениями можно показать, что следует взять  $n = 2$  ветви по  $m = 4$  светодиода в каждой.

### 11 класс

1. Согласно условию задачи, масса пружины мала, поэтому показания динамометров  $F_1$  и  $F_2$  линейно зависят от массы  $m$  подвешенного груза:  $F_1 = A + m\alpha$ ,  $F_2 = A + (m + m_k)\alpha$ , где  $m_k$  – это масса корпуса одного динамометра. В эксперименте с грузом неизвестной массы  $M$  в зависимости от расположения динамометров они могут показывать разные значения. Существуют четыре различных варианта.

1) У обоих динамометров пружины находятся ниже корпусов, т.е. сверху груз привязан к пружине верхнего динамометра, а снизу – к корпусу нижнего динамометра. Тогда  $F_3 = A + (m_k + M)\alpha$  и  $F_4 = A$ . Решая четыре полученных уравнения, находим

$$M = \frac{F_1 - F_2 + F_3 - F_4}{F_1 - F_4} m.$$

2) У обоих динамометров пружины находятся выше их корпусов, т.е. сверху груз привязан к корпусу верхнего динамометра, а снизу – к пружине нижнего динамометра. Тогда  $F_3 = A + (2m_k + M)\alpha$  и  $F_4 = A + \alpha m_k$ . В этом случае

$$M = \frac{F_1 - F_2 + F_3 - F_4}{F_2 - F_4} m.$$

3) У верхнего динамометра пружина находится ниже корпуса, а у нижнего динамометра – выше корпуса, т.е. и сверху и снизу груз привязан к пружинам динамометров. В этом случае  $F_3 = A + (m_k + M)\alpha$ ,  $F_4 = A + \alpha m_k$ , и

$$M = \frac{F_3 - F_4}{F_2 - F_4} m.$$

4) У верхнего динамометра пружина находится выше корпуса, а у нижнего динамометра – ниже корпуса, т.е. и сверху и снизу груз привязан к корпусам динамометров. При этом  $F_3 = A + (2m_k + M)\alpha$ ,  $F_4 = A$ , и

$$M = \frac{2F_1 - 2F_2 + F_3 - F_4}{F_1 - F_4} m.$$

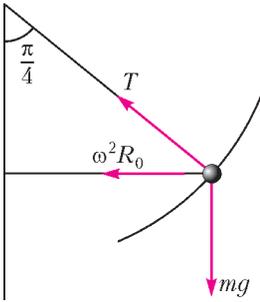


Рис. 15

2. Рассмотрим один из грузов. Записывая второй закон Ньютона в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси для положения равновесия (рис. 15), получаем  $m\omega^2 R_0 = T \sin \frac{\pi}{4}$  и  $T \cos \frac{\pi}{4} = mg$ , откуда  $mg = m\omega^2 R_0$ , где

$R_0 = a/\sqrt{2}$  – расстояние от оси вращения до груза в положении равновесия. Перейдем в систему отсчета, вращающуюся с угловой скоростью  $\omega$ . Она неинерциальная, в ней удобно ввести в рассмотрение фиктивную центробежную силу инерции, равную  $F = m\omega^2 R = m\omega^2 R_0 \frac{R}{R_0} = \frac{mg}{R_0} R$ , где  $R$  – расстояние от груза до оси вращения (в равновесном положении  $R = R_0$ ), и направленную по горизонтали вправо. Удобство такого перехода состоит в том, что во вращающейся системе отсчета рассматриваемый груз в положении равновесия покоится, а при выведении из положения равновесия груз совершает колебания под действием всех действующих на него сил.

Рассмотрим сначала нулевое приближение к решению задачи. Заметим, что в положении равновесия  $F = mg$ . Будем считать, что сила  $F$  при малых колебаниях груза не изменяется. Тогда наша система представляет собой обычный математический маятник, колеблющийся в эффективном однородном поле силы тяжести, ускорение которого направлено под углом  $45^\circ$  к вертикали и равно  $\sqrt{2}g$ . Квадрат частоты колебаний такого маятника равен  $\Omega_0^2 = \frac{\sqrt{2}g}{a}$ , а период колебаний равен

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{a}{\sqrt{2}g}}.$$

Для получения правильного ответа нужно учитывать, что при малых колебаниях груза действующая на него сила  $F$  изменяется по модулю (но не по направлению), поскольку меняется расстояние  $R$  от груза до оси вращения. Изобразим на рисунке 16 малое смещение груза от его положения равновесия в процессе колебаний. Смещение груза в некоторый момент времени будем характеризовать координатой  $x$  и соответствующим ей малым углом  $\varphi$ . С точностью до линейных по  $x$  слагаемых справедливо равен-

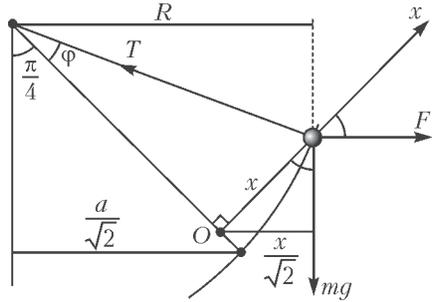


Рис. 16

ство  $R = \frac{x+a}{\sqrt{2}}$ . Тогда

$$F = mg \frac{x+a}{a} = mg \left(1 + \frac{x}{a}\right).$$

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось  $x$  и на перпендикулярное к ней направление и после некоторых преобразований получим уравнение гармонических колебаний

$$x'' + \frac{g}{\sqrt{2}a} x = 0.$$

Следовательно, груз совершает малые гармонические колебания, период которых равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a\sqrt{2}}{g}}.$$

3. Пусть потенциал точки  $A$  до охлаждения пластины равен  $\Phi_A = \frac{1}{2} I r_1$ . Тогда потенциал точки  $B$  равен  $\Phi_B = -\frac{1}{2} I r_1$ . Из симметрии пластины следует, что потенциал точки  $D$  равен  $\Phi_D = \frac{1}{2} U_1$ , а потенциал точки  $C$  равен  $\Phi_C = -\frac{1}{2} U_1$ . Если удельное сопротивление обоих проводников уменьшится в одинаковое количество  $n$  раз, то и сопротивление пластины уменьшится в  $n$  раз. На рисунке 17 показана ситуация для  $n = 4$ . При этом при пропускании прежнего тока разности потенциалов между любыми парами точек пластины уменьшатся в  $n$  раз. Рассмотрим теперь, как будут изменяться сопротивления участков нашей пластины вследствие охлаждения, заданного в условии задачи. На рисунке 18 слева показана пластина до охлаждения, справа – после него. Заметим, что на рисунках 17 и 18 справа изображены одинаковые пластины – с точностью до поворота рисунка на  $90^\circ$ . Это означает, что если в исходной пластине уменьшить сопротивления всех участков в 4 раза, ток пропускать через вершины  $B$  и  $C$ , а вольтметр подключить к вершинам  $A$  и  $D$ , то получится ситуация, соот-

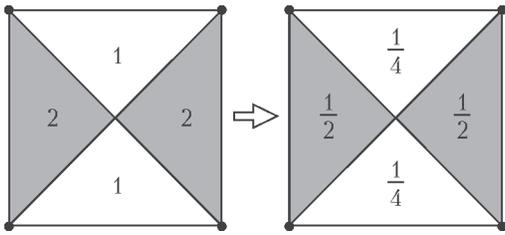


Рис. 17

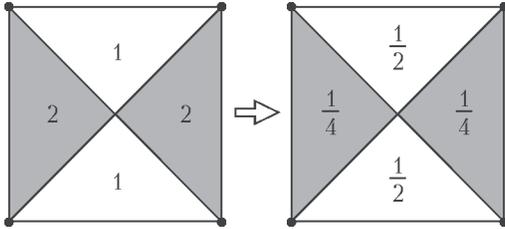


Рис. 18

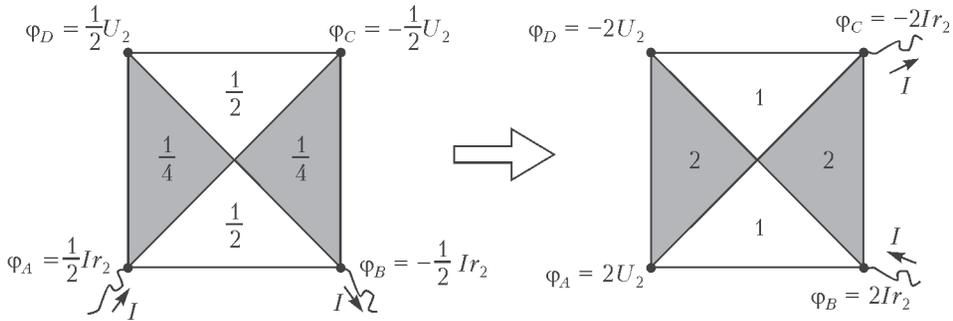


Рис. 19

ветствующая пластине после охлаждения, в которой ток протекает через вершины *A* и *B* и сопротивление которой равно  $r_2$ . Если теперь обратно увеличить сопротивление всех участков пластины в 4 раза, то получится исходная пластина до охлаждения, в которой ток пропускается через вершины *B* и *C*. Следовательно, сопротивление в этом случае равно

$$R_{BC} = 4r_2$$

– это ответ на первый вопрос задачи.

Обозначим потенциалы в вершинах пластины для двух ситуаций: а) пластина после охлаждения, ток протекает через вершины *A* и *B* (рис.19, слева); б) пластина до охлаждения, ток протекает через вершины *B* и *C* (рис.19, справа). Правый рисунок получается из левого путем умножения всех удельных сопротивлений и потенциалов на 4 и последующего поворота на  $90^\circ$ . Рассмотрим теперь суперпозицию двух исходных не охлажденных пластин – при пропускании тока *I* через вершины *A* и *B* и при пропускании того же тока через вершины *B* и *C*. Эта

суперпозиция приводит как раз к ситуации, когда ток силой *I* пропускается в исходной неохлажденной пластине между вершинами *A* и *C*. Ввиду линейности закона Ома, потенциалы складываются. Поэтому окончательно получаем

$$R_{AC} = \frac{\left(\frac{1}{2}Ir_1 + 2U_2\right) - \left(-\frac{1}{2}U_1 - 2Ir_2\right)}{I} = \frac{1}{2}(r_1 + 4r_2) + \frac{U_1 + 4U_2}{2I}.$$

4. Будем решать задачу с использованием графического метода. В стационарном режиме, когда конденсатор полностью заряжен, ток течет только через резистор и бареттер. При этом сила тока *I* определяется соотношением

$$\varepsilon - IR = U_6,$$

где  $U_6$  – напряжение на бареттере. Изобразим

вольт-амперную характеристику бареттера, соответствующую правой части записанного выше уравнения (рис.20). На том же графике будем проводить прямые линии, соответствующие левой части уравнения для разных *R*. На рисунке показаны две такие прямые – для сопротивлений 50 Ом и 500 Ом. Проведем также прямую, которая проходит через точку излома вольт-амперной характеристики бареттера и пересекает горизонтальную ось в точке  $U = \varepsilon = 6$  В.

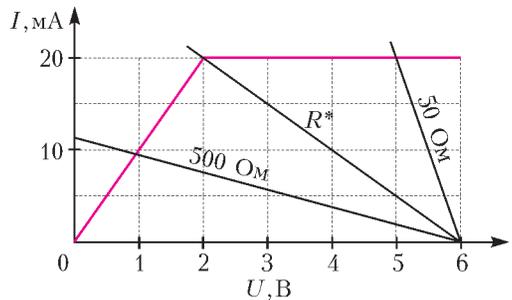


Рис. 20

Обозначим сопротивление, соответствующее этой прямой, через  $R^*$ . Из графика  $R^* = (4 \text{ В}) / (20 \text{ мА}) = 200 \text{ Ом}$ . Обратим внимание на то, что в стационарном режиме сила тока, текущего через резистор, достигает максимума. Теперь можно ответить на вопросы задачи.

1) Из графика следует, что при сопротивлении  $R = 50 \text{ Ом}$  сила тока, текущего через резистор в стационарном режиме, равна  $20 \text{ мА}$ . Следовательно, напряжение на нем и на конденсаторе равно  $1 \text{ В}$ . При сопротивлении  $R = 500 \text{ Ом}$  сила тока, текущего через резистор, равна  $10 \text{ мА}$ , а напряжение на конденсаторе равно  $5 \text{ В}$ .

2) Пусть сопротивление резистора равно  $R^* = 200 \text{ Ом}$ . Это означает, что в процессе зарядки бареттер работает в режиме стабилизации все время: сразу после замыкания ключа напряжение на бареттере равно  $6 \text{ В}$ , через него течет ток силой  $20 \text{ мА}$ ; по мере того как конденсатор заряжается, напряжение на бареттере уменьшается, но сила тока все время остается постоянной. Сумма тока зарядки конденсатора  $I_C$  и тока  $I_R$ , текущего через резистор, все время равна  $I_0 = 20 \text{ мА}$ . Отсюда следует, что сила тока, текущего через резистор, увеличивается от нулевого значения (сразу после замыкания ключа) до  $20 \text{ мА}$  в стационарном режиме. Через батарейку в процессе зарядки все время течет ток силой  $I_0 = 20 \text{ мА}$ . Скорость изменения энергии конденсатора равна

$$\frac{dW}{dt} = \varepsilon I_0 - I_R^2 R - U_C I_0.$$

Напряжение на бареттере в любой момент времени удовлетворяет соотношению

$$U_C = \varepsilon - I_R R.$$

Объединяя две последние формулы, получаем

$$\frac{dW}{dt} = I_R I_0 R - I_R^2 R.$$

Эта квадратичная функция от  $I_R$  имеет максимум при  $I_R = I_0 / 2 = 10 \text{ мА}$ . Очевидно, это значение силы тока через резистор достигается в процессе зарядки конденсатора.

3) Сопротивление  $5000 \text{ Ом}$  значительно больше порогового значения  $200 \text{ Ом}$ , поэтому сила тока, текущего через резистор в стационарном режиме, будет близка к нулю. Напряжение, до которого зарядится конденсатор, будет приблизительно равно ЭДС батареи, т.е.  $6 \text{ В}$ . Следовательно, половина максимального заряда конденсатора достигается при напряжении на конденсаторе  $U_C = 3 \text{ В}$ . В процессе зарядки конденсатора до этого напряжения бареттер работает в режиме стабилизации (поскольку напряжение на нем из-

меняется от  $6 \text{ В}$  до  $3 \text{ В}$ ), а сила тока, текущего через резистор, пренебрежимо мала ( $0,6 \text{ мА}$  при напряжении  $3 \text{ В}$ ). Получается, что конденсатор заряжается почти постоянным током силой  $20 \text{ мА}$ . Искомое время зарядки конденсатора равно

$$t = \frac{CU_C}{I_0} = 1,5 \text{ мс}.$$

## НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИЭТ»

ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА «РИТМ МИЭТ!»

Ф И З И К А

- $v = 2\sqrt{\frac{gh}{\sqrt{3}}} \approx 4,8 \text{ м/с}.$
- $F_p = \sqrt{(mg)^2 + F^2} = 5 \text{ Н}.$
- $A = 2Mv^2.$
- $C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{Q}{T_0(n^2 - 1)} = 2,5 \text{ Дж/К}.$
- $v_{\max} = v_0$  при  $v_0 < v_1$  и  $v_{\max} = \frac{v_0}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{v_1}{v_0} \right)^2} \right)$  при  $v_0 > v_1$ , где  $v_1 = \frac{q}{\sqrt{\pi \varepsilon_0 m d}}.$
- $Q = \frac{C}{2} (\varepsilon - IR)^2 = 90 \text{ мкДж}.$
- $F = 10 \text{ см}.$
- $\frac{hc}{\lambda_2} = A_2 < A < A_1 = \frac{hc}{\lambda_1},$   
 $3,30 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} < A < 3,96 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА МИЭТ

Ф И З И К А

10 класс

Вариант 1

- а)  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 2,5 \text{ м/с}^2$ ; б)  $L = 60 \text{ м}.$
- $\frac{m_1}{m_2} = \frac{M_1 V_1}{M_2 V_2} = 2.$
- $p_0 = \frac{3p}{2} = 0,3 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$
- а)  $F_2 = F_1 - 2mg = 1 \text{ Н};$   
б)  $F_3 = \sqrt{\frac{F_1^2 + F_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{F_1^2 + (F_1 - 2mg)^2}{2}} = \sqrt{5} \text{ Н} \approx 2,24 \text{ Н}.$

$$5. \text{ а) } I = \frac{3U}{11R} = 0,6 \text{ А; б) } Q_1 = \frac{4}{27} Q_3 = 0,4 \text{ Дж.}$$

Вариант 2

$$1. F = \mu mg \left( \frac{nm}{M} + 1 \right) = 10 \text{ Н.}$$

$$2. \text{ а) } v = 2\sqrt{gL} \sin \frac{\alpha}{2} = 3 \text{ м/с;}$$

$$\text{ б) } v = 2\sqrt{\frac{Lgk}{k+1}} \sin \frac{\alpha}{2} \approx 2,7 \text{ м/с.}$$

$$3. \frac{N_2}{N_1} = \frac{100\%}{28} - 1 = 1,5.$$

$$4. Q = \frac{3}{2} Fh = 30 \text{ Дж.}$$

$$5. \text{ а) } U_3 = 20 \text{ В; б) } r = \frac{5}{4} R = 25 \text{ Ом.}$$

11 класс

Вариант 1

$$1. \text{ а) } a_1 = 0, \quad a_2 = 2,5 \text{ м/с}^2; \text{ б) } L = 45 \text{ м.}$$

$$2. M_1 = M_2 \frac{V_2}{V_1} = 2 \text{ г/моль.}$$

$$3. \mathcal{E} = \sqrt{\frac{Q}{2C}} = 5 \text{ В.}$$

$$4. \text{ а) } m = \frac{F_1 - F_2}{2g} = 50 \text{ г; б) } F_3 = \sqrt{F_1 F_2} \approx 1 \text{ Н.}$$

$$5. \text{ а) } I = \frac{\mathcal{E}}{R}; \text{ б) } Q = \frac{L\mathcal{E}^2}{15R^2}.$$

Вариант 2

$$1. F_{\max} = (m + M)g(\mu_1 + \mu_2) = 9,6 \text{ Н.}$$

$$2. \text{ а) } v_2 = v_1 \frac{m}{M} = 1 \text{ м/с;}$$

$$\text{ б) } W = \frac{mv_1^2}{2} \left( 1 + \frac{m}{M} \right) = 3 \text{ Дж.}$$

$$3. Q = 2p_0V = 1 \text{ кДж.}$$

$$4. v_{\max} = \sqrt{\frac{2qER}{m}}.$$

$$5. \text{ а) } I = \frac{\beta S}{R} = 5 \text{ мкА; б) } n = \frac{2}{\cos \alpha + 1} = \frac{4}{3}.$$

### ВНИМАНИЮ НАШИХ ЧИТАТЕЛЕЙ!

В 2018 году наш журнал выходит в том же формате, что и в 2017 году. И мы по-прежнему будем выпускать 12 номеров в год. В остальном «Квант» остается тем же, что и был раньше, — научно-популярным журналом по физике и математике для школьников и всех, кому это интересно.

Подписаться на наш журнал можно с любого номера в любом почтовом отделении связи. Наш подписной индекс в каталоге агентства «Пресса России» — 90964.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» можно найти на сайте: <http://kvant.ras.ru>

# КВАНТ

12+

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.А.Аткарская, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.  
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: (495) 930-56-48**

**E-mail: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru), [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru)**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными  
материалами**

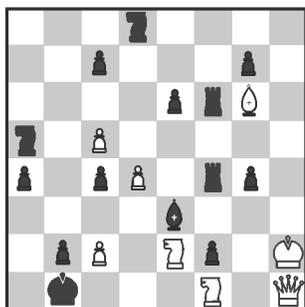
**в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»**

**Телефон: (495) 363-48-86,**

**<http://capitalpress.ru>**

## СимволическиЕ ШАХМАТНЫЕ КОМПОЗИЦИИ

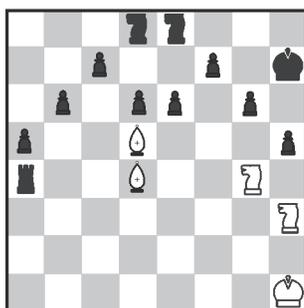
В одном из предыдущих выпусков шахматной странички мы рассматривали изобразительные шахматные этюды – начальная или финальная позиция которых напоминает какое-то известное изображение. Сегодня мы познакомимся с более сложной разновидностью таких задач – символическими шахматными композициями, ход решения которых отражает какое-то историческое событие, чаще всего воинского характера.



**А.Петров, 1824**  
**Мат в 14 ходов**

Одна из самых известных символических шахматных задач посвящена событиям Отечественной войны 1812 года. В ней изображено бегство французского императора Наполеона (черный король) из Москвы (поле b1) в Париж (поле g8). Преследование короля белыми конями символизирует погоню русской кавалерии под командованием атамана Платова за Наполеоном: 1. ♖d2+ ♜a2 2. ♜c3+ ♜a3 3. ♜2b1+ ♜b4 4. ♜a2+ ♜b5 5. ♜1c3+ ♜a6. Белые могут объявить мат следующим ходом: ♞a8×. Однако, поставив условие, что задача должна решаться в 14 ходов, А.Петров продемонстрировал исторический факт: генерал Чичагов мог захватить Наполеона в плен при

переправе через реку Березину, однако упустил эту возможность. Поэтому погоня продолжается: 6. ♜b4+ ♜a7 7. ♜b5+ ♜b8 8. ♜a6+ ♜c8 9. ♜a7+ ♜d7. 10. ♜b8+ ♜e7 11. ♜c8+ ♜f8 12. ♜d7+ ♜g8 13. ♜e7+ ♜h8. Финальный ход: 14. ♞g2× демонстрирует торжественный въезд русской армии под командованием императора Александра I в Париж, ознаменовавший победный конец войны.



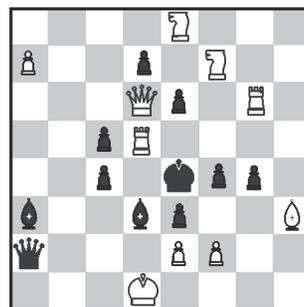
**А.Петров, 1824**  
**Мат в 12 ходов**

Еще одна задача выдающегося русского шахматного композитора, посвященная событиям 1812 года, носит название «Партизанская война 1812 года». Центральная роль в ней снова принадлежит коням (партизанские отряды), которые окружают в дремучем лесу отряд французов (черный король): 1. ♜g5+ ♜g8 2. ♜h6+ ♜f8 3. ♜h7+ ♜e7 4. ♜g8+ ♜d7 5. ♜f8+ ♜c8 6. ♜e7+ ♜b8 7. ♜d7+ ♜a7 8. ♜c8+ ♜a6 9. ♜b8+ ♜b5 10. ♜a7+ ♜b4 11. ♜a6+ ♜a3 12. ♜b5×.

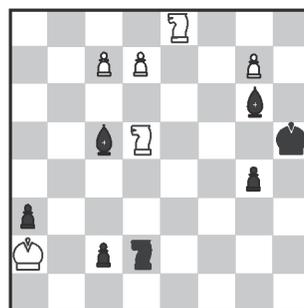
**К.Яниш, 1849**

### Спертый мат в 10 ходов

Композиция под названием «Железная клетка Тамерлана», автором которой является профессор математики К.Яниш, символизирует сражение монгольского хана Тамерлана и турецкого султана Баязида, случившееся в начале 15 века. В этой задаче черные фигуры дол-



жны отнять у собственного короля все поля для отступления, что с виду кажется невозможным, однако спертый мат достигается за 10 ходов: 1. f3+ gf 2. ed+ cd 3. ♜f5+ ef 4. ♜e6+ de 5. ♜d4+ cd 6. a8 ♜+ ♜d5 7. ♜d5+ ed 8. ♜f6+ gf 9. ♜e5+ fe 10. ♜g5× – король в клетке!



**В.Корольков, 1937**  
**Выигрыш**

Изобразительный этюд международного гроссмейстера по шахматной композиции В.А.Королькова посвящен Первой конной армии под командованием С.М.Буденного. Белый король в опасности: ему грозит мат после 1...c1 ♜+, однако выручает конница – все три пешки превращаются в коней и ставят мат черному королю. 1. ♜f4+ ♜h6 – единственный ход, отступление короля на h4 или g5 позволит белым с шахом поставить ферзя: d8 ♞+ и затем остановить пешку после ♜e2 и ♞d2. 2. g8 ♜+! ♜h7 3. ♜gf6+ ♜h6 4. ♜g4+ ♜h7 5. ♜ef6+ ♜f7 6. ♜e6+ ♜f7 7. d8 ♜+! ♜e7 8. c8 ♜×!

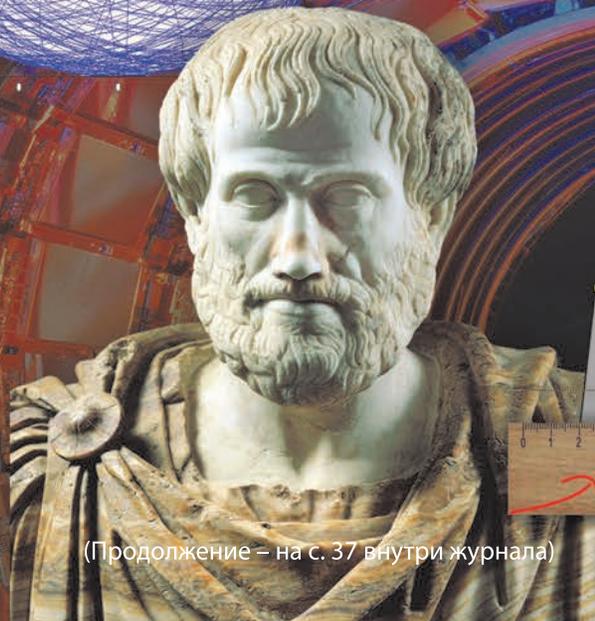
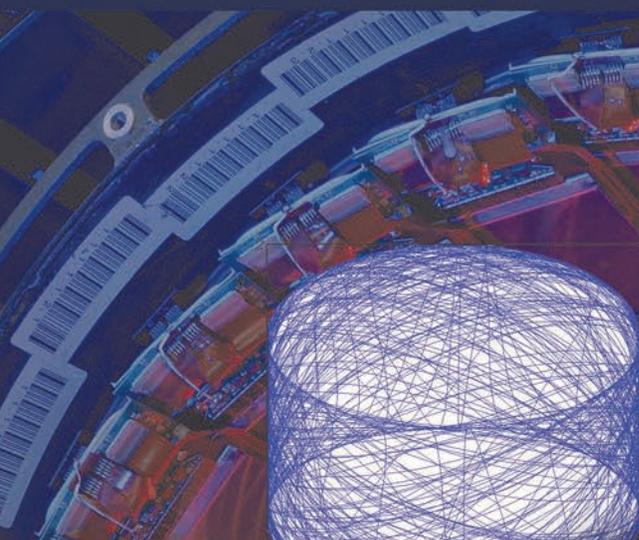
*А.Русанов*

Индекс 90964

# Уроки с физикой

## УДИВИТЕЛЬНЫЙ МАЯТНИК

Если к одному концу легкого стержня прикрепить грузик, а другой конец закрепить, то получим обычный маятник. А теперь перевернем наш маятник, т.е. поставим его «вверх ногами» ...



(Продолжение – на с. 37 внутри журнала)